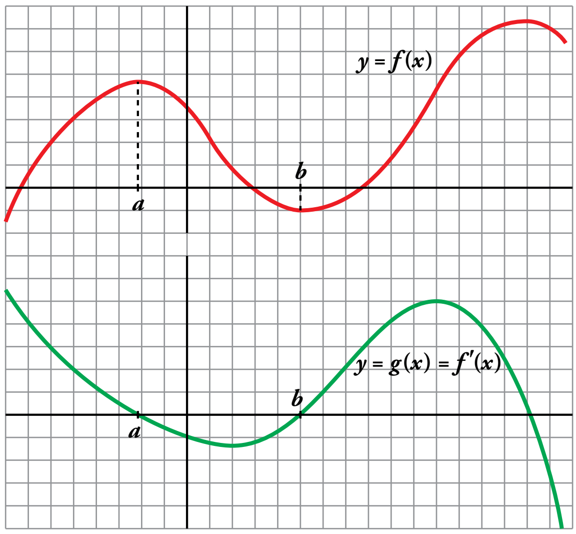
Resuelve

Página 239

Función derivada

■ **Continúa escribiendo las razones por las cuales $g(x)$ es una función cuyo comportamiento responde al de la derivada de $f(x)$.**



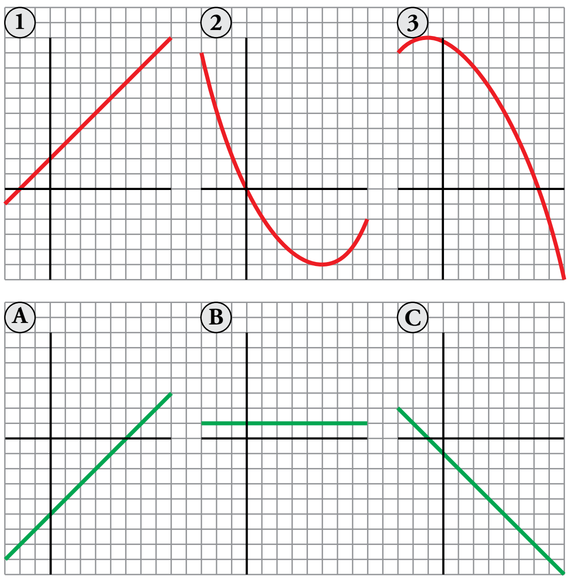
- En el intervalo (a, b), $f(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada es negativa. Es lo que le pasa a $g(x)$ en (a, b).
- La derivada de f en b es 0: $f'(b) = 0$. Y también es $g(b) = 0$.
- En general:

  $g(x) = f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene tangente horizontal.

  $g(x) = f'(x) > 0$ donde $f(x)$ es creciente.

  $g(x) = f'(x) < 0$ donde $f(x)$ es decreciente.

■ **Las tres gráficas de abajo, A, B y C, son las funciones derivadas de las gráficas de arriba, 1, 2 y 3, pero en otro orden. Explica razonadamente cuál es la de cada una.**



1) B

2) A

3) C

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente, y es negativa donde la función decrece.

1 Derivada de una función en un punto

Página 241

1 Halla, paso a paso, las derivadas siguientes:

a) $4x - x^2$ **en** $x_0 = 3$

b) x^3 **en** $x_0 = 2$

c) $\frac{1}{x}$ **en** $x_0 = 2$

d) $(x-3)^2$ **en** $x_0 = 1$

a) $\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{4(3+h)-(3+h)^2-3}{h} = \frac{12+4h-9-6h-h^2-3}{h} = -h-2$

$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h-2) = -2$

b) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3-8}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = h^2+6h+12$

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h^2+6h+12) = 12$

c) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{-1}{2(h+2)}$

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2(h+2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h-3)^2-4}{h} = \frac{(h-2)^2-4}{h} = h-4$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (h-4) = -4$

2 Halla, paso a paso, la derivada lateral $f'(0^+)$ de $f(x) = \sqrt{x}$ y justifica la respuesta.

Si $h > 0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}-0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \rightarrow$ No existe $f'(0^+)$.

3 ¿Qué condición debe cumplir una función, f, para ser derivable en el intervalo [1, 5)?

Para que f sea derivable en [1, 5), debe serlo en el intervalo abierto (1, 5) y, además, debe existir la derivada lateral $f'(1^+)$.

Página 243

4 Estudia la derivabilidad en $x_0 = 3$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le 3 \\ 3x - 9, & x > 3 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (3x - 9) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 0$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 3$.

- Derivabilidad en $x_0 = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 = f'(3^-) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 3 = 3 = f'(3^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x_0 = 3$. Además, $f'(3) = 3$.

5 Estudia la derivabilidad en $x_0 = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 3, & x \le 0 \\ -x^2 + 2x + 3, & x > 0 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 5x + 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 2x + 3) = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3. \text{ Además, } f(0) = 3.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

- Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 5) = -5 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-2x + 2) = 2 = f'(0^+) \end{cases}$$

Las derivadas laterales son finitas pero no coinciden. Por tanto, no es derivable en $x_0 = 0$.

6 Estudia la derivabilidad de la siguiente función en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- Continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-\sqrt{-x}) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0. \text{ Además, } f(0) = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x_0 = 0$.

- Derivabilidad en $x_0 = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty \end{cases}$$

Las derivadas laterales no existen al ser infinitos los límites. Por tanto, no es derivable en $x_0 = 0$.

7 Calcula m y n para que $f(x)$ sea derivable en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 5, & x \le 0 \\ -x^2 + n, & x > 0 \end{cases}$$

- Si $x \neq 0$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.
- Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - mx + 5) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x^2 + n) = n \\ f(0) = 5 \end{array}\right\}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, ha de ser: $n = 5$.

- Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x - m) = -m = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -2x = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 0$, ha de ser: $-m = 0 \ \to \ m = 0$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ para $m = 0$ y $n = 5$.

3 Reglas de derivación

Página 247

1 **Utiliza las reglas de derivación para calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

c) $f(x) = ln\ \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $f(x) = \dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}}$

f) $f(x) = ln\ \sqrt{e^{tg\ x}}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log(sen\ x \cdot cos\ x)^2$

i) $f(x) = tg^2\ x + sen^2\ x$

j) $f(x) = sen\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}$

k) $f(x) = arc\ sen\ \sqrt{x}$

l) $f(x) = sen\,(3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x})$

m) $f(x) = \sqrt{sen\ x + x^2 + 1}$

n) $f(x) = cos^2\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$

b) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$$

c) Utilizamos el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2(1+x)}{(1-x)(1+x)^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

De otra forma: Si tomamos logaritmos previamente:

$f(x) = ln\ (1-x) - ln\ (1+x)$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2} = \frac{-2}{1-x^2}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-(1+tg^2\ x)(1+tg\ x) - (1-tg\ x) \cdot (1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2} =$

$$= \frac{(1+tg^2\ x)\,[-1-tg\ x-1+tg\ x]}{(1+tg\ x)^2} = \frac{-2\,(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2}$$

De otra forma: Si tenemos en cuenta el resultado obtenido en a):

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+tg\ x)^2} \cdot D[tg\ x] = \frac{-2}{(1+tg\ x)^2} \cdot (1+tg^2\ x) = \frac{-2\,(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2}$$

e) Teniendo en cuenta el resultado obtenido en d):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-tg\ x}{1+tg\ x}}} \cdot \frac{-2\,(1+tg^2\ x)}{(1+tg\ x)^2} = \frac{-(1+tg^2\ x)}{\sqrt{(1-tg\ x)(1+tg\ x)^3}}$$

También podríamos haber llegado a este resultado utilizando los resultados del apartado en b).

f) $f(x) = ln\ \sqrt{e^{tg\,x}} = ln\ e^{(tg\,x)/2} = \dfrac{tg\ x}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\ x}{2}$

g) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}} = 3^{(x+1)/2}$

$f'(x) = 3^{(x+1)/2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\ 3 = \dfrac{ln\ 3}{2} \cdot \sqrt{3^{x+1}}$

h) $f(x) = log\ (sen\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\,[log\ (sen\ x + log\ (cos\ x)]$

$f'(x) = 2\left[\dfrac{cos\ x}{sen\ x} \cdot \dfrac{1}{ln\,10} + \dfrac{-sen\ x}{cos\ x} \cdot \dfrac{1}{ln\,10}\right] = \dfrac{2}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos^2\ x - sen^2\ x}{sen\ x \cdot cos\ x} =$

$= \dfrac{4}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos^2\ x - sen^2\ x}{2sen\ x \cdot cos\ x} = \dfrac{4}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos\ 2x}{sen\ 2x} = \dfrac{4}{ln\,10 \cdot tg\ 2x}$

De otra forma:

$f(x) = log\ (sen\ x \cdot cos\ x)^2 = 2\ log\left(\dfrac{sen\ 2x}{2}\right)$

$f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{ln\,10} \cdot \dfrac{cos\ 2x}{(sen\ 2x)/2} = \dfrac{4}{ln\,10 \cdot tg\ 2x}$

i) $f'(x) = 2tg\ x \cdot D[tg\ x] + 2sen\ x \cdot D[sen\ x] = 2tg\ x \cdot (1 + tg^2\ x) + 2sen\ x \cdot cos\ x = 2\,(tg\ x + tg\ x) + 2sen\ x \cdot cos\ x$

j) $f'(x) = \dfrac{cos\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{sen\ \sqrt{x+1} \cdot (-sen\ \sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \dfrac{cos\ \sqrt{x+1} \cdot cos\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{sen\ \sqrt{x+1} \cdot sen\ \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}$

k) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$

l) $f'(x) = cos\ (3x^5 - 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{2x}) \cdot \left(15x^4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{sen\ x + x^2 + 1}} \cdot (cos\ x + 2x) = \dfrac{cos\ x + 2x}{2\sqrt{sen\ x + x^2 + 1}}$

n) $f'(x) = 2\ \ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot \left[-sen\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\right] \cdot \dfrac{1 + 2\,(3-x) \cdot (-1)}{\sqrt[3]{(x + (3 - x^2))^2}} =$

$= \dfrac{-2\ \ cos\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2}\ sen\ \sqrt[3]{x + (3-x)^2} \cdot (2x - 5)}{3\sqrt[3]{x + (3-x)^2)^2}} = \dfrac{(5 - 2x) \cdot sen\ (2\sqrt[3]{x + (3-x)^2})}{3\sqrt[3]{(x + (3-x)^2)^2}}$

2 Halla las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ **b)** $y = x\ cos\ x$ **c)** $y = sen^3\ x + cos^2\ x + x$

a) $y = x^5 \;\rightarrow\; y' = 5x^4;\ \ y'' = 20x^3;\ \ y''' = 60x^2$

b) $y = x\ cos\ x \;\rightarrow\; y' = cos\ x - x\ sen\ x$

$y'' = -sen\ x - sen\ x - x\ cos\ x = -2sen\ x - x\ cos\ x$

$y''' = -2cos\ x - cos\ x + x\ sen\ x = -3cos\ x + x\ sen\ x$

c) $f'(x) = 3sen^2\,x \cdot D[sen\,x] + 2cos\,x \cdot D[cos\,x] + 1 = 3sen^2\,x \cdot cos\,x - 2cos\,x \cdot sen\,x + 1$

$f''(x) = 6sen\,x \cdot cos\,x - 3sen^2\,x \cdot sen\,x + 2sen^2\,x - 2cos^2\,x = 6sen\,x \cdot cos^2\,x - 3sen^3 x + 2sen\,x$

$$f'''(x) = 6cos\,x \cdot cos^2\,x + 6sen\,x \cdot 2cos\,x \cdot D[cos\,x] - 9sen^2\,x \cdot D[sen\,x] + 4sen\,x \cdot D[sen\,x] - 4cos\,x =$$
$$= 6cos^3\,x - 12sen^2\,x \cdot cos\,x - 9sen^2\,x \cdot cos\,x + 4sen\,x \cdot cos\,x + 4cos\,x \cdot sen\,x =$$
$$= 6cos^3\,x - 21cos\,x \cdot sen^2\,x + 8cos\,x \cdot sen\,x$$

3 **Calcula $f'(1)$ siendo:**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{3x}}{2\sqrt[5]{3x^2}} \cdot e^4 = \frac{x^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot e^4}{2 \cdot 3^{1/5} \cdot x^{2/5}} = \frac{3^{2/15} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30} = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{2} \cdot x^{13/30}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{3} \cdot \frac{13}{30}\,x^{-17/30} = \frac{13\,\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}\,\sqrt[30]{x^{17}}$$

Por tantos: $f'(1) = \dfrac{13\,\sqrt[15]{9} \cdot e^4}{60}$

4 **Calcula $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ siendo:**

$$f(x) = (cos^2\,3x - sen^2\,3x) \cdot sen\,6x$$

$$f(x) = (cos^2\,3x - sen^2\,3x) \cdot sen\,6x = cos\,6x \cdot sen\,6x = \frac{sen\,12x}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12\;cos\,12x}{2} = 6cos\,12x$$

Por tanto: $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 6 \cdot cos\,\dfrac{12\pi}{6} = 6 \cdot cos\,(2\pi) = 6 \cdot 1 = 6$

5 **Calcula $f'(0)$ siendo:**

$$f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arc\,tg\,\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$$f(x) = ln\,\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2x+1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2 + 4x + 1}{3}} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 + 4x + 1} = \frac{2x+1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{2}{4x^2 + 4x + 4} =$$

$$= \frac{2x+1}{2x^2 + 2x + 2} - \frac{1}{2x^2 + 2x + 2} = \frac{2x}{2x^2 + 2x + 2} = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

Por tanto: $f'(0) = 0$

4 Derivada de una función conociendo la de su inversa

Página 249

1 Halla $(f^{-1})'(x)$ a partir de $f'(x)$:

a) $f(x) = x^2 - 1,\ x \in [1, 3]$ **b) $f(x) = x^3$**

a) $y = x^2 - 1 \rightarrow x = y^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x+1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

$$f[f^{-1}(x)] = x \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x \rightarrow 2\sqrt{x+1} \cdot D[\sqrt{x+1}] = 1 \rightarrow D[\sqrt{x+1}] = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f[f^{-1}(x)] = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = x \rightarrow 3(\sqrt[3]{x})^2\, D[\sqrt[3]{x}] = 1 \rightarrow D[\sqrt[3]{x}] = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

2 $f(x) = tg\, x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Halla $(f^{-1})'(\sqrt{3})$ de dos formas:

a) Obteniendo, previamente, $(f^{-1})'(x)$. **b) Directamente.**

a) $f^{-1}(x) = arc\ tg\ x$

$$f[f^{-1}(x)] = x \Leftrightarrow tg\,(arc\ tg\ x) = 1 \rightarrow [1 + tg^2\,(arc\ tg\ x)] \cdot D[arc\ tg\ x] = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 + x^2) \cdot D[arc\ tg\ x] = 1 \rightarrow D[arc\ tg\ x] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(f^{-1})'(\sqrt{3}) = \frac{1}{1+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{4}$$

b) $f^{-1}(\sqrt{3}) = arc\ tg\,(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$$(f^{-1})'(\sqrt{3}) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{4}$$

Ya que $f'(x) = D[tg\, x] = 1 + tg^2\, x$

5 Derivada de una función implícita

Página 250

1 Halla la tangente (o las tangentes) a las curvas siguientes en el punto que se indica:

a) $3x^2 - 5xy + 2y^2x - y^3 - 27 = 0$, **en** $x_0 = 3$

b) $sen\,(x^2y) - y^2 + x = 2 - \dfrac{\pi^2}{16}$, **en** $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$, **en** $x_0 = 5$

a) Calculamos las ordenadas de los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

$$3x^2 - 5xy + 2y^2x - y^3 - 27 = 0 \rightarrow 27 - 15y + 6y^2 - y^3 - 27 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -15y + 6y^2 - y^3 = 0 \rightarrow y(-15 + 6y - y^2) = 0 \rightarrow y = 0$$

Derivamos:

$$6x - 5y - 5xy' + 4xyy' + 2y^2 - 3y^2y' = 0 \rightarrow y' = \frac{-6x + 5y - 2y^2}{-5x + 4xy - 3y^2} \rightarrow x = 3,\ y = 0 \rightarrow y' = \frac{-18}{-15} = \frac{6}{5}$$

La recta tangente es:

$$y = 0 + \frac{6}{5}(x-3)$$

b) Como sabemos las dos coordenadas del punto, $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, derivamos:

$$sen\,(x^2y) - y^2 + x = 2 - \frac{\pi^2}{16} \rightarrow cos\,(x^2y)\,(2xy + x^2\,y') - 2yy' + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 2,\ y = \frac{\pi}{4} \rightarrow cos\,\pi \cdot (\pi + 4y') - \frac{\pi}{2}y' + 1 = 0 \rightarrow -\pi - 4y' - \frac{\pi}{2}y' + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \frac{\pi - 1}{-4 - (\pi/2)} = \frac{2 - 2\pi}{\pi + 8}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{2 - 2\pi}{\pi + 8}(x-2)$$

c) Calculamos las ordenadas de los puntos de abscisa $x_0 = 5$.

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \rightarrow 9 + (y+1)^2 = 25 \rightarrow y = -5,\ y = 3$$

Derivamos:

$$2(x-2) + 2(y+1)y' = 0 \rightarrow y' = \frac{2-x}{y+1} \rightarrow \begin{cases} x = 5,\ y = -5 \rightarrow y' = \dfrac{2-5}{-5+1} = \dfrac{3}{4} \\ x = 5,\ y = 3 \rightarrow y' = \dfrac{2-5}{3+1} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

En este caso hay dos rectas tangentes:

$$y = -5 + \frac{3}{4}(x-5) \quad \text{e} \quad y = 3 - \frac{3}{4}(x-5)$$

6 Derivación logarítmica

Página 251

1 **Halla la función derivada de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = (\cos x + 1)^{x^2-1}$ **b)** $g(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-1}\, sen^2\, x}$ **c)** $h(x) = (\cos x)^{e^{x^2+1}}$

a) $\ln f(x) = (x^2-1)\ln(\cos x + 1) \to \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln(\cos x + 1) + (x^2-1)\cdot\dfrac{-sen\, x}{\cos x + 1} \to$

$$\to f'(x) = (\cos x + 1)^{x^2-1}\left[2x\ln(\cos x + 1) - \frac{(x^2-1)\, sen\, x}{\cos x + 1}\right]$$

b) $\ln g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\, sen^2\, x\right) = \dfrac{1}{2}[3\ \ln x - \ln(x^2-1) + 2\ \ln(sen\, x)]$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2\ \cos x}{sen\, x}\right) \to g'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{x^2-1}\, sen\, x}\left(\frac{3}{x} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2\ \cos x}{sen\, x}\right)$$

c) $\ln h(x) = e^{x^2+1}\ln(\cos x) \to \dfrac{h'(x)}{h(x)} = e^{x^2+1}\cdot 2x\cdot\ln(\cos x) + e^{x^2+1}\cdot\dfrac{-sen\, x}{\cos x} \to$

$$\to h'(x) = (\cos x)^{e^{x^2+1}}\cdot e^{x^2+1}\left[2x\ln(\cos x) - \frac{sen\, x}{\cos x}\right]$$

8 Diferencial de una función

Página 257

1 Calcula Δy, dy, $\Delta y - dy$:

a) $y = x^2 - x$ para $x_0 = 3$, $dx_0 = 0{,}01$

b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ para $x_0 = 2$, $dx_0 = 0{,}1$

c) $y = \sqrt[3]{x}$ para $x_0 = 125$, $dx_0 = 1$

a) $\Delta y = y(3{,}01) - y(3) = 6{,}0501 - 6 = 0{,}0501$

$dy = y' \cdot dx = (2x - 1) \cdot dx$, que evaluado en $x_0 = 3$ y $dx_0 = 0{,}01$ es:

$5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$

$\Delta y - dy = 0{,}0001$

b) $\Delta y = y(2{,}1) - y(2) = 1{,}8466 - 1{,}7321 = 0{,}1145$

$dy = y' \cdot dx = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot dx$, que evaluado en $x_0 = 2$ y $dx_0 = 0{,}1$ es:

$\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0{,}1 = 0{,}1155$

$\Delta y - dy = -0{,}001$

c) $\Delta y = y(126) - y(125) = 5{,}01330 - 5 = 0{,}01330$

$dy = y' \cdot dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx$, que evaluado en $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$ es:

$\dfrac{1}{75} \cdot 1 = 0{,}01333$

$\Delta y - dy = -0{,}00003$

2 A una bola de bronce de 7 cm de radio se le da un baño de plata de 0,2 mm de grosor. Calcula la cantidad de plata empleada (aproximadamente, a partir de la diferencial).

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$dV = 4\pi r^2 \cdot \text{h} = 4\pi \cdot 7^2 \cdot 0{,}02 = 12{,}3088$

Se emplean, aproximadamente, 12,3 cm^3 de plata.

3 Calcula una aproximación de $\sqrt[3]{126}$ dando los siguientes pasos:

- **Llama $f(x) = \sqrt[3]{x}$.**
- **Obtén df para $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1$.**
- **Obtén $f(126) \approx f(125) + df(125)$ para $dx_0 = 1$.**

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$df = f'(x) \cdot dx = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx \;\to$ Evaluado en $x_0 = 125$ y $dx_0 = 1 \;\to\; df(125) = \dfrac{1}{75} = 0{,}0133$

Así:

$f(126) \approx f(125) + df(125) = 5 + 0{,}0133 = 5{,}0133$

4 **Procediendo como en el ejercicio anterior, halla, aproximadamente:**

a) $\mathbf{1{,}01^4}$

b) $\mathbf{\sqrt{15{,}8}}$

c) $\mathbf{\sqrt[3]{66}}$

a) $f(x) = x^4$; $x_0 = 1$; $dx_0 = 0{,}01$

$df = f'(x) \cdot dx = 4x^3 \cdot dx = 4 \cdot 1^3 \cdot 0{,}01 = 0{,}04$

$f(1{,}01) \approx f(1) + df(1) = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$

b) $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 16$; $dx_0 = -0{,}2$

$$df = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot (-0{,}2) = -0{,}025$$

$f(15{,}8) \approx f(16) + df(16) = \sqrt{16} - 0{,}025 = 3{,}975$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $x_0 = 64$; $dx_0 = 2$

$$df = f'(x) \cdot dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot 2 = 0{,}0417$$

$f(66) \approx f(64) + df(64) = 4 + 0{,}0417 = 4{,}0417$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 258

1. Definición de función derivada

Hazlo tú. Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ utilizando la definición.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 4}}{h} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminación)}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{(x+h)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4}$ para poder simplificar la fracción:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{(x+h)^2 - 4})^2 - (\sqrt{x^2 - 4})^2}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x)}{h(\sqrt{(x+h)^2 - 4} + \sqrt{x^2 - 4})} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

2. Estudio de la derivabilidad de una función definida a trozos

Hazlo tú. Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representa las gráficas de f y f'.

$f(x)$ está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$. Por tanto, es continua y derivable en ellos.

En $x = -1$ es continua porque $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -1$.

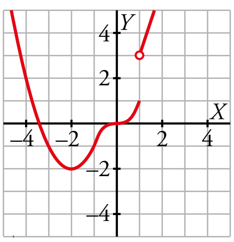
En $x = 1$ no lo es porque no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ ya que los límites laterales son distintos:

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} 3x = 3 \end{cases}$$

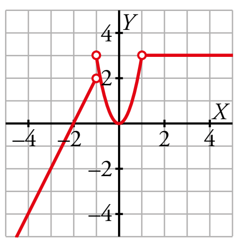
No puede ser derivable en $x = 1$ por no ser continua.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3 & \text{si } 1 < x \end{cases} \to \begin{cases} f'(-1^-) = 2 \\ f'(-1^+) = 3 \end{cases} \to \text{No es derivable en } x = -1$$

Gráfica de $f(x)$:



Gráfica de $f'(x)$



Página 259

3. Valor de un parámetro para que f sea derivable

Hazlo tú. Halla el valor que ha de tener a para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^4 - 2x^2 - 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida por funciones polinómicas en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$. Por tanto, es continua y derivable en ellos.

Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -2 \to \text{La función es continua para cualquier valor de } a.$$

Derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax^3 - 4x & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = 0 \end{cases} \to f(x) \text{ es derivable para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R}$ para cualquier valor de a.

4. Función derivada

Hazlo tú. Calcula la función derivada de esta función y representa f y f'.

$$f(x) = |2 - x| + |x + 1|$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 2 \\ -2 + x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

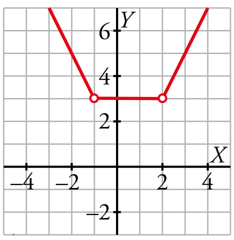
$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ -1 + 2x & \text{si } 2 \le x \end{cases} \to \text{Es una función continua por ser suma de funciones continuas.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

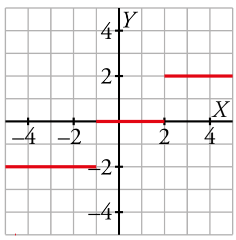
$f'(-1^-) = -2$, $f'(-1^+) = 0 \to$ No es derivable en $x = 1$.

$f'(2^-) = 0$, $f'(2^+) = 2 \to$ No es derivable en $x = 2$.

Gráfica de $f(x)$:



Gráfica de $f'(x)$:



Página 260

5. Reglas de derivación

Hazlo tú. **Halla la función derivada de estas funciones:**

a) $y = arc\ sen\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$

a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot D\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right] = \sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}} \cdot \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

b) $y = ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = ln\,(x^2+1) - 2\ ln\,x$

$y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2}{x}$

Página 261

7. Obtención de $(f^{-1})'(x)$ conociendo $f'(x)$

Hazlo tú. **Sabemos que:**

$$f(x) = ln\,(ln\,x)^2 \text{ y que } f'(x) = \frac{2}{x\,ln\,x}$$

Calcula $(f^{-1})'(x)$.

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(1)]} = \dfrac{f^{-1}(x) \cdot ln\,(f^{-1}(x))}{2}$

$y = ln\,(ln\,x)^2 \to x = ln\,(ln\,y)^2 \to x = 2\ ln\,(ln\,y) \to \dfrac{x}{2} = ln\,(ln\,y) \to e^{x/2} = ln\,y \to y = e^{(e^{x/2})}$

Por tanto,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x) \cdot ln\,(f^{-1}(x))}{2} = \frac{e^{(e^{x/2})} \cdot ln\,e^{(e^{x/2})}}{2} = \frac{e^{(e^{x/2})} \cdot e^{(x/2)}}{2} = \frac{e^{(e^{x/2}+x/2)}}{2}$$

8. Obtención de $(f^{-1})'(x_0)$ sin calcular $(f^{-1})'(x)$

Hazlo tú. **Dada la función del *Hazlo tú* del ejercicio anterior, calcula $(f^{-1})'(0)$ sin utilizar la función derivada de la inversa $(f^{-1})'(x)$.**

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(0)]}$

Calculamos $f^{-1}(0) = e^{(e^{0/2})} = e$:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{f'(e)}{2} = \frac{e\,ln\,e}{2} = \frac{e}{2}$$

Ejercicios y problemas guiados

Página 262

1. Obtención de los valores de dos parámetros para que la función sea derivable

Calcula los parámetros a y b para que la siguiente función sea derivable en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{a}{x} + b \cdot e^{x-1} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como queremos que la función sea derivable en $x = 1$, primero debe ser continua en dicho punto.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + \dfrac{a}{x} + b \cdot e^{x-1}\right) = 1 + a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x+1} = 1 \end{cases} \to 1 + a + b = 1 \to a + b = 0$$

Además, como $f(1) = 1 + a + b$, la relación anterior garantiza la continuidad en $x = 1$.

Por otra parte, para que sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales en dicho punto deben ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{a}{x^2} + b \cdot e^{x-1} & \text{si } x < 1 \to f'(1^-) = 2 - a + b \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \to f'(1^+) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to 2 - a + b = -\frac{1}{2}$$

Resolvemos el sistema y se obtienen los valores buscados:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a + b &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \to a = \frac{5}{4},\ b = -\frac{5}{4}$$

2. Derivación implícita

Halla los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ en los que su tangente tiene pendiente $-\frac{3}{4}$. Represéntala.

Derivamos en forma implícita:

$$2x + 2yy' + 6 - 2y' = 0$$

Como $y' = -\dfrac{3}{4}$, se obtiene $2x - \dfrac{3y}{2} + 6 + \dfrac{3}{2} = 0 \to 4x - 3y + 15 = 0$.

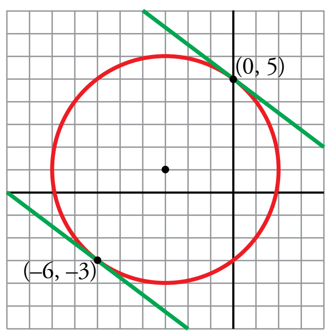
Resolvemos el sistema formado por la ecuación de la circunferencia y la condición anterior:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 &= 0 \\ 4x - 3y + 15 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$y = \frac{4x+15}{3} \to x^2 + \left(\frac{4x+15}{3}\right)^2 + 6x - 2 \cdot \frac{4x+15}{3} - 15 = 0 \to x = -6,\ x = 0$$

$$x = -6 \to y = \frac{4 \cdot (-6) + 15}{3} = -3$$

$$x = 0 \to y = 5$$



3. Derivación logarítmica

Utiliza la derivación logarítmica y las propiedades de los logaritmos para calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log_x tg\, x$

b) $y = (x+1)^{tg\, x}$

c) $y = \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt[4]{x+1}$

a) $y = \log_x tg\, x \;\rightarrow\; x^y = tg\, x \;\rightarrow\; y \ln x = \ln tg\, x \;\rightarrow\; y = \dfrac{\ln tg\, x}{\ln x}$

$$y' = \frac{\dfrac{\ln x}{\cos^2 x \cdot tg\, x} - \ln tg\, x \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\dfrac{1}{sen\, x \cdot \cos x} \cdot \ln x - \dfrac{\ln tg\, x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln^2 x}\left(\frac{\ln x}{sen\, x \cdot \cos x} - \frac{\ln tg\, x}{x}\right)$$

b) $\ln y = tg\, x \cdot \ln(x+1) \;\rightarrow\; \dfrac{y'}{y} = \dfrac{\ln(x+1)}{\cos^2 x} + tg\, x \cdot \dfrac{1}{x+1}$

$$y' = (x+1)^{tg\, x}\left[\frac{\ln(x+1)}{\cos^2 x} + \frac{tg\, x}{x+1}\right]$$

c) $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-1) + \dfrac{1}{4}\ln(x+1) \;\rightarrow\; \dfrac{y'}{y} = \dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{1}{4(x+1)} \;\rightarrow\; \dfrac{y'}{y} = \dfrac{5x-1}{4(x^2-1)}$

$$y' = \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt[4]{x+1} \cdot \frac{5x-1}{4(x^2-1)}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 263

Para practicar

Definición de derivada

1 **Halla con calculadora el cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{h}$ para $x_0 = 2$ y $h = 0{,}1$ de:**

a) $f(x) = \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = x^2 - 5x + 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Compara resultados con las derivadas de estas funciones en el punto de abscisa 2.

a) $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \dfrac{\sqrt{2,1} - \sqrt{2}}{0,1} = 0,349$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \to f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0,354$

b) $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \dfrac{2,1^2 - 5 \cdot 2,1 + 1 - (-5)}{0,1} = -0,9$

$f'(x) = 2x - 5 \to f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$

c) $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f(2,1) - f(2)}{0,1} = \dfrac{\dfrac{1}{2,1} - \dfrac{1}{2}}{0,1} = -0,238$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \to f'(2) = \dfrac{-1}{2^2} = -0,25$

2 **Halla con calculadora el cociente incremental $\dfrac{\Delta f}{h}$ para $x_0 = \pi/3$ y $h = 0{,}01$ de:**

a) $f(x) = sen\ x$

b) $f(x) = cos\ x$

c) $f(x) = tg\ x$

Compara resultados con las derivadas de estas funciones en el punto de abscisa $\pi/3$.

a) $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{3} + 0,01\right) - sen\ \dfrac{\pi}{3}}{0,01} = 0,496$

$f'(x) = cos\ x \to f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = cos\ \dfrac{\pi}{3} = 0,5$

b) $\dfrac{\Delta f}{h} = = \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \dfrac{cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 0,01\right) - cos\ \dfrac{\pi}{3}}{0,01} = -0,869$

$f'(x) = -sen\ x \to f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -sen\ \dfrac{\pi}{3} = -0,866$

c) $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{3} + 0,01\right) - f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{0,01} = \dfrac{tg\left(\dfrac{\pi}{3} + 0,01\right) - tg\ \dfrac{\pi}{3}}{0,01} = 4,07$

$f'(x) = \dfrac{1}{cos^2\ x} \to f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{cos^2\ \dfrac{\pi}{3}} = 4,0$

3 **Sabemos que** $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$**.**

A partir de esta expresión, justifica la validez de esta otra:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Si expresamos la diferencia entre x y x_0 usando la letra h, es decir, $h = x - x_0$, obtenemos que $x = x_0 + h$. Además, cuando $x \to x_0$, la diferencia $x - x_0 \to 0$, es decir, $h \to 0$. Sustituyendo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

4 **Escribe la expresión de los siguientes límites (se supone que las funciones que intervienen son derivables):**

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ **b)** $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(5) - f(5 + x)}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\phi(2 + x) - \phi(2)}{x} = \phi'(2)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(5) - f(5 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{f(5 + x) - f(5)}{x}\right) = -f'(5)$

5 **El límite** $\lim\limits_{h \to 0} \frac{sen\,(\pi + h) - sen\,\pi}{h}$ **es la derivada de la función *seno* en el punto de abscisa** π**, es decir,** $sen'(\pi)$**. Por tanto, el límite es:**

$$sen'(\pi) = cos\,(\pi) = -1$$

Calcula análogamente, es decir, a partir de las reglas de derivación que ya conoces, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h}$ **b)** $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{2 + h} - e^2}{h}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$

a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{4 + h} - 2}{h} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{2 + h} - e^2}{h} = e^2$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2 - 3x + 1) - 1}{x - 3} = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4} = 3 \cdot 4^2 = 48$

6 **Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(2)$ en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+2}$

a) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2+h-1}{2+h+1} - \dfrac{1}{3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{h+1}{h+3} - \dfrac{1}{3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2}{3h+9} = \dfrac{2}{9}$

b) $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \dfrac{1}{4}$

7 **Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada caso:**

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x+h+\dfrac{1}{x+h} - \left(x - \dfrac{1}{x}\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h + \dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{hx(x+h)+x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(x^2+hx-1)}{hx(x+h)} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(\sqrt{(x+h)^2+1})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{h(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1})}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1})} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(2x+h)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1})} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Reglas de derivación

Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

8 **a)** $y = \dfrac{x^2-3}{x^2+3}$ **b)** $y = \sqrt[3]{3x^2}$

a) $y' = \dfrac{2x(x^2+3)-(x^2-3)\,2x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2} = \dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$

b) $y' = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9x}}$

9 **a)** $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2/3}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1\cdot(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1/3} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$

$= \dfrac{2}{3} \dfrac{-2}{(1-x)^{1/3}\cdot(1+x)^{5/3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^5}}$

b) $y' = 2\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot 2x = -\dfrac{2}{x^2} + x$

10 **a)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **b)** $y = 7e^{-x}$

a) $y' = \dfrac{(1/x)\cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

b) $y' = -7e^{-x}$

11 a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ b) $y = sen\ x \cos x$

a) $y' = \dfrac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{3^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{(e^x - e^{-x})^2} = \dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$

b) $y' = \cos x \cdot \cos x + (-sen\ x) \cdot sen\ x = \cos^2 x - sen^2 x = \cos 2x$

12 a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$ b) $y = \ln (x^2 + 1)$

a) $y' = \dfrac{-\cos x}{sen^2 x}$

b) $y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

13 a) $y = arc\ tg \dfrac{x}{3}$ b) $y = \cos^2 (2x - \pi)$

a) $y' = \dfrac{1}{1 + (x/3)^2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/3}{1 + (x^2/9)} = \dfrac{3}{9 + x^2}$

b) $y' = 2 \cos (2x - \pi) \cdot (-sen\ (2x - \pi)) \cdot 2 = -4 \cos (2x - \pi) \cdot sen\ (2x - \pi) = -2 \cos (4x - 4\pi)$

14 a) $y = sen^2 x$ b) $y = \sqrt{tg\ x}$

a) $y' = 2 sen\ x \cdot \cos x = sen\ 2x$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\ x}} \cdot (1 + tg^2 x) = \dfrac{1 + tg^2 x}{2\sqrt{tg\ x}}$

15 a) $y = sen\ x^2$ b) $y = arc\ tg (x^2 + 1)$

a) $y' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2 + 1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^4 + 2x^2 + 2}$

16 a) $y = (2\sqrt{x} - 3)^7$ b) $y = \log_2 \sqrt{x}$

a) $y' = 7(2\sqrt{x} - 3)^6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{x}}(2\sqrt{x} - 3)^6$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x \ln 2}$

17 a) $y = sen^2 x^2$ b) $y = arc\ tg \dfrac{1}{x}$

a) $y' = 2 sen\ x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 4x \cdot sen\ x^2 \cdot \cos x^2 = 2x \cdot sen\ (2x^2)$

b) $y' = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{-(1/x^2)}{1 + (1/x^2)} = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$

18 a) $y = \cos^5 (7x^2)$ b) $y = 3^x + 1$

a) $y' = 5 \cos^4 (7x^2) \cdot (-sen\ (7x^2)) \cdot 14x = -70x \cos^4 (7x^2)\ sen\ (7x^2)$

b) $y' = 3^x \ln 3$

19 a) $y = \sqrt[3]{(5x - 3)^2}$ b) $y = arc\ sen \dfrac{x^2}{3}$

a) $y' = \dfrac{2}{3}(5x - 3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x - 3}}$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{3}\right)^2}} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{\dfrac{2x}{3}}{\dfrac{\sqrt{9 - x^4}}{3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9 - x^4}}$

20 a) $y = \ln (2x - 1)$ b) $y = tg \dfrac{x^2}{2}$

a) $y' = \dfrac{2}{2x - 1}$

b) $y' = \left(1 + tg^2 \dfrac{x^2}{2}\right) \cdot \dfrac{2x}{2} = x + x \cdot tg^2 \dfrac{x^2}{2}$

21 a) $y = ln\,(x^2 - 1)$ b) $y = arc\ cos\ \sqrt{2x}$

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

b) $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1-2x}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}$

22 a) $y = ln\,\sqrt{1-x}$ b) $y = (arc\ tg\ x)^2$

a) $y = ln\,\sqrt{1-x} = ln\,(1-x)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\,ln\,(1-x)$

$y' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{(1-x)} = \dfrac{-1}{2-2x}$

b) $y' = 2\,(arc\ tg\ x)\cdot\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2\ arc\ tg\ x}{1+x^2}$

23 a) $y = log_3\,(7x+2)$ b) $y = ln\left(tg\,\dfrac{3}{x}\right)$

a) $y' = \dfrac{1}{ln\,3}\cdot\dfrac{7}{(7x+2)} = \dfrac{7}{(7x+2)\,ln\,3}$

b) $y' = \dfrac{1}{tg\,3/x}\cdot\left(1+tg^2\,\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{3\,(1+tg^2\,(3/x))}{x^2\ tg\,(3/x)}$

24 a) $y = e^{4x}$ b) $y = ln\left(ln\,\dfrac{1}{x}\right)$

a) $y' = 4e^{4x}$

b) $y' = \dfrac{1}{ln\,(1/x)}\cdot\dfrac{1}{1/x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x\ ln\,(1/x)}$

25 a) $y = 2^x$ b) $y = arc\ sen\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

a) $y' = 2^x\cdot ln\,2$

b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2}}\cdot\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}}{x-1}}\cdot\dfrac{-2}{(x-1)^2} =$

$= -\dfrac{\dfrac{2}{x-1}}{\sqrt{(x-1)^2-(x+1)^2}} = \dfrac{2}{(x-1)\sqrt{x^2+1-2x-x^2-1-2x}} = -\dfrac{2}{(x-1)\sqrt{-4x}}$

26 a) $y = 5tg^3\,(3x^2+1)$ b) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

a) $y' = 15\,tg^2\,(3x+1)\cdot[1+tg^2\,(3x^2+1)]\cdot 6x = 90x\,[tg^2\,(3x^2+1)+tg^4\,(3x^2+1)]$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

27 a) $y = \sqrt{tg\ x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}$

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{tg\ x^2}}\,(1+tg^2\,x^2)\cdot 2x = \dfrac{x\,(1+tg^2\,x^2)}{\sqrt{tg\ x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^{-2/3}\cdot\dfrac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-2}{x-2}\right)^2}}\cdot\dfrac{4}{(x+2)^2} =$

$= \dfrac{4}{3\cdot(x+2)^2\cdot\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{(x+2)^{2/3}}} = \dfrac{4}{3\,(x+2)^{4/3}\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(x+2)^4\,(x-2)^2}} =$

$= \dfrac{4}{3\,(x+2)\sqrt[3]{(x+2)\,(x-2)^2}}$

Página 264

Otras técnicas de derivación

28 Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

b) $y = ln(x\ tg\ x)^2$

c) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right)$

d) $y = ln(2^x \cdot sen^2\ x)$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}[ln(1-x) - ln(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2}$$

b) $y = ln(x\ tg\ x)^2 = 2[ln\ x + ln(tg\ x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\ x}{tg\ x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{2}{tg\ x} + tg\ x\right] = \frac{2}{x} + 2\ cotg\ x + 2tg\ x$$

c) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2}\right) = ln\sqrt[3]{x^2-1} - ln\ x^2 = \dfrac{1}{3}ln(x^2-1) - 2ln\ x$

$$y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)} - 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x}{3(x^2-1)} - \frac{2}{x}$$

d) $y = ln(2^x\ sen^2\ x) = ln\ 2^x + ln\ sen^2\ x = x\ ln\ 2 + 2\ ln\ sen\ x$

$$y' = ln\ 2 + 2\cdot\frac{cos\ x}{sen\ x} = ln\ 2 + \frac{2}{tg\ x}$$

29 Calcula la derivada de estas funciones implícitas:

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$

c) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(y+3)^2}{14} = 1$

e) $x^3 + y^3 = -2xy$

f) $xy^2 = x^2 + y$

g) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

h) $4x^2 + 4y^2 + 8x + 3 = 0$

i) $x^2 + xy + y^2 = 0$

j) $yx - x^2 - y = 0$

a) $2x + 2y \cdot y' = 0$

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

b) $2x + 2yy' - 4 - 6y' = 0$

$y'(2y-6) = 4 - 2x$

$$y' = \frac{4-2x}{2y-6} = \frac{2-x}{y-3}$$

c) $\dfrac{2x}{16} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$\dfrac{x}{8} + \dfrac{2yy'}{9} = 0$

$\dfrac{2yy'}{9} = -\dfrac{x}{8} \to 2yy' = \dfrac{-9x}{8} \to y' = \dfrac{-9x}{16y}$

d) $\dfrac{2(x-1)}{8} - \dfrac{2(y+3)y'}{14} = 0$

$\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{(y+3)y'}{7} = 0$

$y' = \dfrac{7(x-1)}{4(y+3)}$

e) $3x^2 + 3y^2y' + 2y + 2xy' = 0$

$y'(3y^2 + 2x) = -3x^2 - 2y$

$y' = \dfrac{-3x^2 - 2y}{3y^2 + 2x}$

f) $xy^2 = x^2 + y$

$y^2 + x \cdot 2yy' = 2x + y'$

$2xyy' - y' = 2x - y^2$

$y'(2xy - 1) = 2x - y^2$

$y' = \dfrac{2x - y^2}{2xy - 1}$

g) $\dfrac{2x}{9} - \dfrac{2yy'}{25} = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{yy'}{25} = \dfrac{x}{9} \;\rightarrow\; y' = \dfrac{25x}{9y}$

h) $8x + 8yy' + 8 = 0 \;\rightarrow\; yy' = -x - 1 \;\rightarrow\; y' = \dfrac{-x-1}{y}$

i) $2x + y + xy' + 2yy' = 0 \;\rightarrow\; y'(x + 2y) = -2x - y \;\rightarrow\; y' = \dfrac{-2x - y}{x + 2y}$

j) $y'x + y - 2x - y' = 0 \;\rightarrow\; y'(x-1) = 2x - y \;\rightarrow\; y' = \dfrac{2x - y}{x - 1}$

30 Aplica la derivación logarítmica para derivar:

a) $y = x^{3x}$ **b)** $y = x^{x+1}$ **c)** $y = x^{e^x}$

d) $y = (ln\, x)^{x+1}$ **e)** $y = \left(\dfrac{sen\, x}{x}\right)^x$ **f)** $y = x^{tg\, x}$

a) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\, x^n = n\, ln\, x$:

$y = x^{3x} \;\rightarrow\; ln\, y = 3x\, ln\, x$

Derivamos como función implícita:

$\dfrac{y'}{y} = 3\, ln\, x + 3x \cdot \dfrac{1}{x} = 3\, ln\, x + 3$

Despejamos y':

$y' = x^{3x}(3 ln\, x + 3)$

b) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\, x^n = n\, ln\, x$:

$y = x^{x+1} \;\rightarrow\; ln\, y = (x+1)\, ln\, x$

Derivamos como función implícita:

$\dfrac{y'}{y} = ln\, x + (x+1) \cdot \dfrac{1}{x} = ln\, x + 1 + \dfrac{1}{x}$

Despejamos y':

$y' = x^{x+1}\left(ln\, x + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$

c) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\ x^n = n\ ln\ x$:

$$y = x^{e^x} \to ln\ y = e^x \cdot ln\ x$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = e^x \cdot ln\ x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x\left(ln\ x + \frac{1}{x}\right)$$

Despejamos y':

$$y' = x^{e^x} \cdot e^x\left(ln\ x + \frac{1}{x}\right)$$

d) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\ x^n = n\ ln\ x$:

$$y = (ln\ x)^{x+1} \to ln\ y = (x+1) \cdot ln\ (ln\ x)$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = ln\ (ln\ x) + (x+1) \cdot \frac{1}{ln\ x} \cdot \frac{1}{x} = ln\ (ln\ x) + \frac{x+1}{x\ ln\ x}$$

Despejamos y':

$$y' = (ln\ x)^{x+1} \cdot \left[ln\ (ln\ x) + \frac{x+1}{x\ ln\ x}\right]$$

e) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\ x^n = n\ ln\ x$ y que el logaritmo de un cociente es $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\ a - ln\ b$:

$$y = \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^x \to ln\ y = x\ ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) = x\ (ln\ (sen\ x) - ln\ x)$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = ln\ (sen\ x) - ln\ x + x\left(\frac{cos\ x}{sen\ x} - \frac{1}{x}\right) = ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x} - 1$$

Despejamos y':

$$y' = \left(\frac{sen\ x}{x}\right)^x \cdot \left[ln\left(\frac{sen\ x}{x}\right) + \frac{x\ cos\ x}{sen\ x} - 1\right]$$

f) Tomamos logaritmos en los dos miembros y aplicamos que el logaritmo de una potencia es $ln\ x^n = n\ ln\ x$:

$$y = x^{tg\ x} \to ln\ y = tg\ x \cdot ln\ x$$

Derivamos como función implícita:

$$\frac{y'}{y} = (1 + tg^2\ x) \cdot ln\ x + (tg\ x) \cdot \frac{1}{x}$$

Despejamos y':

$$y' = x^{tg\ x} \cdot \left[(1 + tg^2\ x)\ ln\ x + \frac{tg\ x}{x}\right]$$

31 **Determina la derivada de cada una de estas funciones:**

a) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ **b)** $y = (sen\ x)^x$ **c)** $4x^2 + y^2 + 4x - 12y - 6 = 0$

d) $xy = e^x + y$ **e)** $\sqrt{xy} = ln\ y$ **f)** $x^2 - y^2 + 3xy + 5 = 0$

a) $ln\ y = x \cdot ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \rightarrow \dfrac{y'}{y} = ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + x \cdot \dfrac{(-1/x^2)}{1 + (1/x)} = ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} \rightarrow$

$$\rightarrow y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]$$

b) $ln\ y = x \cdot ln\ sen\ x \rightarrow \dfrac{y'}{y} = ln\ sen\ x + x \cdot \dfrac{cos\ x}{sen\ x} \rightarrow y' = (sen\ x)^x \left(ln\ sen\ x + \dfrac{x \cdot cos\ x}{sen\ x}\right)$

c) $8x + 2yy' + 4 - 12y' = 0 \rightarrow y'(y-6) = -4x - 2 \rightarrow y' = \dfrac{-4x-2}{y-6}$

d) $y + xy' = e^x + y' \rightarrow xy' - y' = e^x - y \rightarrow y' = \dfrac{e^x - y}{x-1}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = \dfrac{y'}{y} \rightarrow \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}(y + xy') = y' \rightarrow \dfrac{y^2}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{xy}{2\sqrt{xy}}y' = y' \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{y^2}{2\sqrt{xy}} = y'\left(1 - \frac{\sqrt{xy}}{2}\right) \rightarrow y' = \frac{y^2/2\sqrt{xy}}{1 - (\sqrt{xy}/2)}$$

f) $2x - 2yy' + 3y + 3xy' = 0 \rightarrow y'(3x - 2y) = -2x - 3y \rightarrow y' = \dfrac{-2x-3y}{3x-2y}$

32 **Obtén la derivada de las siguientes funciones de dos maneras y comprueba, operando, que llegas al mismo resultado:**

I) Utilizando las reglas de derivación que conoces.

II) Aplicando la derivación logarítmica.

a) $y = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

b) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

c) $y = sen^3\ x\ cos^2\ x$

d) $y = \sqrt{x^2+1}\ \sqrt[3]{x^2}$

a) I) $y' = 3\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$

II) $ln\ y = 3(ln\ (x^2+1) - ln\ x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{2x^2 - x^2 - 1}{x(x^2+1)}\right) = \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)}$$

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3(x^2-1)}{x(x^2+1)} = \frac{3 \cdot (x^2+1)^2\,(x^2-1)}{x^4}$$

b) I) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \cdot \dfrac{1-x+1+x}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$

II) $ln\, y = \dfrac{1}{2}[ln(1+x) - ln(1-x)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}\right] = \frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$

c) I) $y' = 3sen^2\, x \cdot cos\, x \cdot cos^2\, x + sen^3\, x \cdot 2cos\, x\,(-sen\, x) = 3sen^2\, x \cdot cos^3\, x - 2cos\, x\; sen^4\, x$

II) $ln\, y = 3\;\; ln\,(sen\, x) + 2\;\; ln\,(cos\, x)$

$$\frac{y'}{y} = 3\,\frac{cos\, x}{sen\, x} + 2 \cdot \frac{-sen\, x}{cos\, x} = \frac{3cos^2\, x - 2sen^2\, x}{sen\, x \cdot cos\, x}$$

$$y' = sen^3\, x \cdot cos^2\, x \cdot \frac{3cos^2\, x - 2sen^2\, x}{sen\, x \cdot cos\, x} = sen^2\, x \cdot cos\, x\,(3cos^2\, x - 2sen^2\, x) =$$

$$= 3sen^2\, x \cdot cos^3\, x - 2cos\, x \cdot sen^4\, x$$

d) I) $y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+1} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{3\sqrt[3]{x}} =$

$$= \frac{3x^2 + 2(x^2+1)}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2+2x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

II) $ln\, y = \dfrac{1}{2}\, ln\,(x^2+1) + \dfrac{2}{3}\, ln\, x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{3x} = \frac{3x^2+2x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{5x^2+2}{3x(x^2+1)} = \frac{5x^2+2}{3\sqrt{x^2+1}\,\sqrt[3]{x}}$$

33 **Calcula el valor de la derivada en $x = 0$ de cada una de las siguientes funciones:**

a) $g(x) = e^{sen\, f(x)}$ si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$

b) $h(x) = [sen\, f(x)]^3$ si $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ y $f'(0) = 1$

c) $j(x) = \sqrt{ln\, f(x)}$ si $f(0) = e$ y $f'(0) = 1$

a) Aplicamos la regla de la cadena:

$$g'(x) = D[sen\, f(x)] \cdot e^{sen\, f(x)} = f'(x) \cdot cos\, f(x) \cdot e^{sen\, f(x)}$$

$$g'(0) = f'(0) \cdot cos\, f(0) \cdot e^{sen\, f(0)} = 1 \cdot cos\, 0 \cdot e^{sen\, f(0)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

b) Aplicamos la regla de la cadena:

$$h'(x) = 3[sen\; f(x)]^2 \cdot D[sen\; f(x)] = 3[sen\; f(x)]^2 \cdot f'(x)\; cos\, f(x)$$

$$h'(0) = 3[sen\; f(0)]^2 \cdot f'(0) \cdot cos\, f(0) = 3\left[sen\,\frac{\pi}{4}\right]^2 \cdot 1 \cdot cos\,\frac{\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

c) Aplicamos la regla de la cadena:

$$j'(x) = \frac{D[ln\; f(x)]}{2\sqrt{ln\; f(x)}} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{ln\; f(x)}}$$

$$j'(0) = \frac{f'(0)}{2f(0)\sqrt{ln\; f(0)}} = \frac{1}{2e\,\sqrt{ln\, e}} = \frac{1}{2e\,\sqrt{1}} = \frac{1}{2e}$$

Diferencial de una función

34 **Determina la diferencial, $df(x)$, para cada una de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

b) $f(x) = e^{2x^2+1}$

c) $f(x) = ln \frac{4}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

a) $df(x) = f'(x)\, dx = (4x^3 - 4x)\, dx$

b) $df(x) = f'(x)\, dx = e^{2x^2+1}\, 4x\, dx$

c) $f(x) = ln\, 4 - 2ln\, x$

$df(x) = f'(x)\, dx = \frac{-2}{x}\, dx$

d) $ln\, f(x) = \frac{1}{3}\, ln\,(x^2+2)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3}\, \frac{2x}{x^2+2} \to f'(x) = \sqrt[3]{x^2+2} \cdot \frac{2x}{3(x^2+2)}$

$df(x) = \frac{2x\sqrt[3]{x^2+2}}{3(x^2+2)}\, dx$

35 **Halla Δy, dy y $\Delta y - dy$ en cada uno de estos casos:**

a) $y = x^2 - 3x + 1$ **para** $x_0 = 2$ **y** $dx_0 = 0{,}2$

b) $y = e^x$ **para** $x_0 = 2$ **y** $dx_0 = 0{,}1$

c) $y = \sqrt[3]{x^2+2}$ **para** $x_0 = 5$ **y** $dx_0 = 0{,}02$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ **para** $x_0 = 1$ **y** $dx_0 = 0{,}1$

a) $\Delta y = 2{,}2^2 - 3 \cdot 2{,}2 + 1 - (-1) = 0{,}24$

$y' = 2x - 3$

$dy = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}2 = 0{,}2$

$\Delta y - dy = 0{,}04$

b) $\Delta y = e^{2{,}1} - e^2 = 0{,}777$

$y' = e^x$

$dy = e^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}739$

$\Delta y - dy = 0{,}777 - 0{,}739 = 0{,}038$

c) $\Delta y = \sqrt[3]{5{,}02^2+2} - \sqrt[3]{5^2+2} = 0{,}0074$

$y' = \frac{2x\sqrt[3]{x^2+2}}{3(x^2+2)}$

$dy = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{5^2+2}}{3(5^2+2)} \cdot 0{,}02 = 0{,}0074$

$\Delta y - dy \approx 0$

d) $\Delta y = \frac{1{,}1}{\sqrt{1{,}1^2 - 2 \cdot 1{,}1 + 5}} - \frac{1}{\sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 5}} = 0{,}049$

$y' = \frac{-x+5}{(x^2-2x+5)\sqrt{x^2-2x+5}}$

$dy = \frac{-1+5}{(1^2 - 2 \cdot 1 + 5)\sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 5}} \cdot 0{,}1 = 0{,}05$

$\Delta y - dy = 0{,}049 - 0{,}05 = -0{,}001$

36 Calcula el valor aproximado de las siguientes expresiones utilizando el diferencial:

a) $\dfrac{1}{4,001}$

b) $\dfrac{1}{2,01^3}$

c) $\log 10\,001$

a) Llamamos $f(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $dx_0 = 0,001$.

$$\frac{1}{4,001} = f(4,001) = f(4) + df(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} \cdot 0,001 = 0,24994$$

b) Llamamos $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{x^4}$; $dx_0 = 0,01$.

$$\frac{1}{2,01^3} = f(2,01) = f(2) + df(2) = \frac{1}{2^3} - \frac{3}{2^4} \cdot 0,01 = 0,12313$$

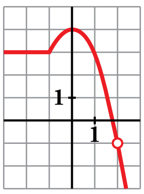
c) Llamamos $f(x) = \log x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10}$; $dx_0 = 1$.

$$\log 10\,001 = f(10\,001) = f(10\,000) + df(10\,000) = \log 10\,000 + \frac{1}{10\,000 \ln 10} \cdot 1 = 4,000043$$

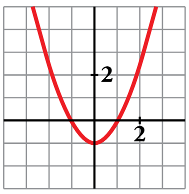
Derivabilidad

37 Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

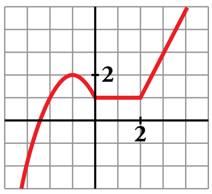
a)



b)



c)



¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?

a) No es derivable en $x = -1$ porque $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$ (tiene un punto “anguloso”) ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ porque $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, y en $x = 2$, porque $f'(2^-) \neq f'(2^+)$ (tiene puntos“angulosos”).

38 a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

a) Si $x \neq 1$, la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x+1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen y coinciden.}$$

Luego $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así, $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x+1 & x \ge 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \ge 1$. Es decir:

$f'(x) = 2x + 1 = 5 \to x = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$

$f'(2) = 5$

39 Comprueba que la función $f(x)$ es continua pero no es derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

- Si $x \ne 2$, la función es continua y derivable.
- Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x-6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 2.$$

- Derivabilidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\} \text{Las derivadas laterales existen pero no coinciden.}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

40 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Si $x \ne 0$ y $x \ne 3$, la función es continua y derivable.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$, $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden, $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$f(x)$ no es continua en $x = 2 \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Página 265

41 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Continuidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x = 1) \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$\to$ La función es continua en $x = 1$ y, por tanto,es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\to$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- En $x = 1$:

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Continuidad:

- En $x \neq 0$ $\to$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$\to$ La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ $\to$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

42 **a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- Si $x \ne 1$, la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- Si $x \ne 1$, la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \ \to \ x = \frac{5}{2}; \ \text{pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \ge 1$

$$-2x - 1 = 0 \ \to \ x = -\frac{1}{2}; \ \text{pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

43 **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si $x \ne 2 \ \to$ la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 2$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$; es decir, $2a + 3 = -b$ o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 2 \rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- En $x = 2$ debe cumplirse que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser $4a + 3 = 4 - b$; es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

44 Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- En $x \neq 0 \rightarrow$ La función es continua pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua ha de ser $b = 0$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0 \rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser $a = -1$.

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

45 **Di si es derivable cada una de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Si es derivable, calcula su valor y, en caso contrario, di cuánto valen las derivadas laterales.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<2 \\ x^2-x+3 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **en** $x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **en** $x_0 = 1$

c) $f(x) = |x|$ **en** $x_0 = 0$

d) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **en** $x_0 = -2$ **y** $x_1 = 3$

a) Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2-x+3) = 5 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5 \to \text{Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x<2 \to f'(2^-) = 3 \\ 2x-1 & \text{si } x>2 \to f'(2^+) = 3 \end{cases}$$

$f'(2^-) = f'(2^+) = 3 \to$ Es derivable en $x_0 = 2$ y $f'(2) = 3$.

b) Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2-1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x-2) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \to \text{Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \to f'(1^-) = 2 \\ 2 & \text{si } x>1 \to f'(1^+) = 2 \end{cases}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) = 2 \to$ Es derivable en $x_0 = 1$ y $f'(1) = 2$.

c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \to \text{Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \to f'(0^-) = -1 \\ 1 & \text{si } x>0 \to f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) \ne f'(0^+) \to$ No es derivable en $x_0 = 0$.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-x-6 & \text{si } x<-2 \\ -x^2+x+6 & \text{si } -2 \le x < 3 \\ x^2-x-6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser el valor absoluto de una función polinómica.

Calculamos las derivadas laterales en cada punto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<-2 \\ -2x+1 & \text{si } -2<x<3 \\ 2x-1 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 5 \end{array}\right\} \to f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \to \text{No es derivable en } x_0 = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -5 \\ f'(3^+) = 5 \end{array}\right\} \to f'(3^-) \ne f'(3^+) \to \text{No es derivable en } x_1 = 3.$$

Para resolver

46 **Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, halla:**

a) $(f \circ g)'(x)$

b) $(g \circ f)'(x)$

c) $(f \circ g')(x)$

d) $(f' \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$

Como $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1 \;\to\; f'(x) = 2x,\; g'(x) = 3$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot (3x + 1) \cdot 3 = 6(3x + 1) = 18x + 6$

También podemos hacer:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = (3x + 1)^2$

$(f \circ g)'(x) = 2 \cdot 3(3x + 1) = 18x + 6$

b) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)]\, f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$

O bien:

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 3x^2 + 1 \;\to\; (g \circ f)'(x) = 6x$

c) $(f \circ g')(x) = f[g'(x)] = f(3) = 9$

d) $(f' \circ g)(x) = 2 \cdot g(x) = 6x + 2$, ya que $f'(x) = 2x$.

47 **Dadas $f(x) = (x + 1)^2$ y $g(x) = x^2$.**

a) Calcula:

$$f'(x^2) \qquad (f \circ g)'(x) \qquad g'[f(x)] \qquad (g \circ f)'(x)$$

b) Si h es una función cualquiera, halla en función de h' y de h las derivadas de:

$$f[h(x)] \qquad f[x + h(x)] \qquad g[f(x + h(x)]$$

a) $f'(x) = 2(x + 1),\; g'(x) = 2x$

$f'(x^2) = 2(x^2 + 1)$

$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) = f'(x^2) \cdot g'(x) = 2(x^2 + 1) \cdot 2x = 4x(x^2 + 1)$

$g'[f(x)] = g'[(x + 1)^2] = 2(x + 1)^2$

$(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = 2(x + 1)^2 \cdot 2(x + 1) = 4(x + 1)^3$

b) $f[h(x)]' = f'[h(x)] \cdot h'(x) = 2[h(x) + 1] \cdot h'(x)$

$f[x + h(x)]' = f'[x + h(x)] \cdot [1 + h'(x)] = 2[x + h(x) + 1] \cdot [1 + h'(x)]$

$g[f[x + h(x)]]' = g'[f[x + h(x)]] \cdot (f[x + h(x)])'[1 + h'(x)] =$

$= g'[(x + h(x) + 1)^2] \cdot (f[x + h(x)])'[1 + h'(x)] =$

$= 2(x + h(x) + 1)^2 \cdot 2[x + h(x) + 1] \cdot [1 + h'(x)] =$

$= 4(x + h(x) + 1)^3 \cdot [1 + h'(x)]$

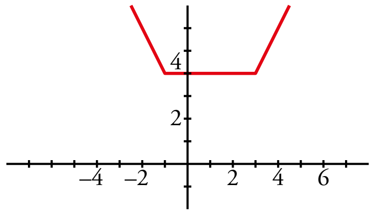
48 **a) Representa la función $f(x) = |x + 1| + |x - 3|$.**

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

b) Representa $f'(x)$.

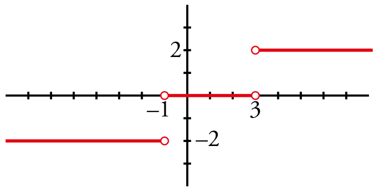
* *Mira el Ejercicio resuelto 4.*

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 - x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 - x + 3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x + 1 + x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No es derivable en $x = -1$ ni en $x = 3$.
(Son puntos “angulosos”).

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



49 **Dada la función $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$**

a) Halla $f'(x)$. **b) Halla $f''(x)$.**

Representa gráficamente los resultados.

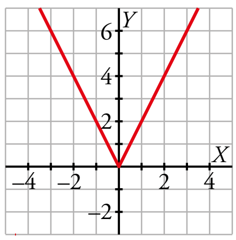
a) La función dada es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente las derivadas laterales coinciden en $x = 0$.

Por tanto, es derivable y $f'(0) = 0$.

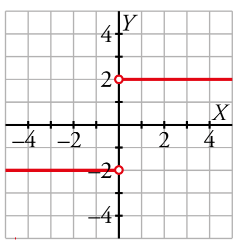
Gráfica de $f'(x)$:



b) Como se puede ver en la gráfica anterior, $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente las derivadas laterales no coinciden en $x = 0$. Por tanto, no existe $f''(0)$.



50 **Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $y = |x - 2|$ **b)** $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$ **d)** $y = x^2 + |x|$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \; f'(2^-) \ne f'(2^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos en los que $y = 0$:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Derivamos:

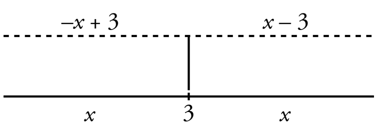
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4^-) = 2(-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2(-4) - 6 = 2 \end{array}\right\} \; f'(-4^-) \ne f'(-4^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2(-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = -2(-2) + 6 = 2 \end{array}\right\} \; f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(-2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) Analizamos el signo de $x - 3$ para definir la función por intervalos:



$$x + (-x + 3) = 3$$
$$x + x - 3 = 2x - 3$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = 2 \end{array}\right\} \; f'(3^-) \ne f'(3^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(3)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) Definimos la función por intervalos. Recordamos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \; f'(0^-) \ne f'(0^+) \; \to \; \text{No existe } f'(0)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

51 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- Si $x \ne 0$:

  Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \; \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \; \text{ Es continua en } x = 0.$$

  Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \ne 0$: Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$$f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -1 \; \to \; \text{No es derivable en } x = 0.$$

  Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x}{x^2-1x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, en $x = -1$ y en $x = 1$ la función no es continua (ni derivable).

Continuidad:

- Si $x \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne 1$:

  La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

- En $x = -1$ y en $x = 1$:

  No es continua, pues no está definida en estos puntos.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\[2mm] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\[2mm] f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ La función es continua en $x = 0$.

  Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilidad:

- Si $x \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne 1$: Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$ y en $x = 1$: No es derivable, pues no está definida la función.
- En $x = 0$:

  $f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -1 \to$ No es derivable en $x = 0$.

  Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

52 Si $f(x) = x^2|x|$, halla f', f'' y f'''.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f''(0^-) = f'(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existe f''', puesto que $f'''(0^-) = -6 \ne f'''(0^+) = 6$).

53 Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{x^2-9} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{array}\right\} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, en $x = -3$ no es continua (ni derivable), pues no está definida.

Continuidad:

- En $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$: Es continua, pues las funciones que la forman son continuas en este caso.
- En $x = 0$ debe ser $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x+3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\} \text{ No es continua en } x = 0 \text{ (tiene una discontinuidad evitable).}$$

- En $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3). \text{ La función es continua en } x = 3.$$

- En $x = -3$: No es continua, pues no está definida.

  Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$: Es derivable. Además: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$
- En $x = 0$ y en $x = -3$: No es derivable, pues no es continua.
- En $x = 3$: Sí es derivable, pues $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

  Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$. Además:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -3$$

54 Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, la función es continua en $x = 0$.

Veamos si es derivable:

- Si $x \neq 0$, tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  No existen las derivadas laterales en $x = 0$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

55 Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si $x > 0$, $x \neq 1$: La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad:

- Si $x > 0$, $x \neq 1$:

Es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \ f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.

56 Averigua los puntos de derivada nula de estas funciones:

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ **b)** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = e^x(x-1)$ **e)** $y = x^2 e^x$ **f)** $y = sen\, x + cos\, x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x-3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ x = \dfrac{8}{3} \rightarrow y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} + 2x^2 + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{2x} - \cancel{x^2} + \cancel{x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \to 2x^2 - 2 = 0 \to x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \to y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \to y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos $(-1, 3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$y' = 0 \to x = 0 \to y = -1$

Se anula en el punto $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \to 2x + x^2 = 0 \to x(2+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = -2 \to y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$y' = 0 \to \cos x = \operatorname{sen} x \to tg\, x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \to y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \to y = -\sqrt{2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

57 **Indica los puntos de derivada nula de estas funciones:**

a) $f(x) = (3x - 2x^2)\,e^x$ **b)** $y = \cos 2x - 2\cos x$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ **d)** $y = \sqrt{4x - x^2}$

a) $f'(x) = (3-4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$

$f'(x) = 0 \to -2x^2 - x + 3 = 0 \to x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \dfrac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

b) $y' = -\operatorname{sen} 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x = -2 \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \to 2\operatorname{sen} x(-2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \to x = 0 + k \cdot \pi \\ -2\cos x + 1 = 0 \to \cos x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \end{cases}$

c) Dominio $= (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

$y' = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = 0 \to x = 2$

Pero $x = 2$ no pertence al dominio de definición de la función. Por tanto, no tiene ningún punto de derivada nula.

d) Dominio $= [0, 4]$

$y' = \dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 0 \to x = 2$ (Sí pertenece al dominio)

La derivada se anula en $x = 2$.

58 **Dada $y = sen\, x$, halla un punto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la tangente sea paralela a la cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.**

La cuerda que pasa por (0, 0) y $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ tiene pendiente $m = \frac{1-0}{(\pi/2)-0} = \frac{2}{\pi}$.

Para que la recta tangente sea paralela a la cuerda, las pendientes deben ser iguales.

$$y' = cos\, x$$

Resolvemos:

$$cos\, x = \frac{2}{\pi} \to x = arc\, cos\, \frac{2}{\pi} = 0,88 \to 50°\ 27'\ 40''$$

Página 266

59 **Halla la derivada de orden n de estas funciones:**

a) $f(x) = e^{2x}$ **b)** $f(x) = x^n$

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2 e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3 e^{2x}$

…

$f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$

Lo demostramos por inducción:

Para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, vemos que se cumple.

Supongamos que es cierto para $n - 1$; es decir, que $f^{n-1}(x) = 2^{n-1} e^{2x}$; entonces, derivando, tenemos que: $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1} e^{2x} = 2^n e^{2x}$. Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo n.

b) $f'(x) = nx^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

…

$f^{n)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$

60 **Calcula la derivada de orden 50 y 51 de esta función: $y = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$**

$$y = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$y' = \frac{\pi}{2} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$y'' = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$y''' = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$y^{4)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

A partir de esta derivada se repite la pauta cada 4 derivadas sucesivas. Por tanto,

$$y^{50)} = (y^{48)})'' = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{48} sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)'' = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{50} sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$y^{51)} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{51} cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

61 **Halla la pendiente de la recta o rectas tangentes a estas funciones en el punto de abscisa que se indica en cada caso:**

a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ **en** $x = 2$

b) $cos\,(x + y) + sen\,(x - y) = 0$ **en** $x = \frac{\pi}{4}$

c) $y = (ln\, x)^{x+1}$ **en** $x = 1$

d) $y = (arc\ tg\, x)^{2x}$ **en** $x = 1$

e) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{81} = 1$ **en** $x = 7$

f) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{ln\, x}$ **en** $x = e^2$

g) $y = \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^x$ **en** $x = \pi$

h) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$ **en** $x = 5$

a) Calculamos primero las ordenadas de los puntos:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \to y = 5,\ y = 3$$

En este caso hay dos rectas tangentes.

Derivamos en forma implícita:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0 \to y' = \frac{2 - 2x}{2y - 8}$$

$$x = 2,\ y = 5 \to y' = \frac{2 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 5 - 8} = -1$$

$$x = 2,\ y = 3 \to y' = \frac{2 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 - 8} = 1$$

b) Calculamos primero las ordenadas de los puntos:

$$cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + sen\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = 0 \to \frac{\sqrt{2}}{2}\, cos\ y - \frac{\sqrt{2}}{2}\, sen\ y + \frac{\sqrt{2}}{2}\, cos\ y - \frac{\sqrt{2}}{2}\, sen\ y = 0 \to$$

$$\to cos\ y - sen\ y = 0 \to y = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

En este caso hay infinitas rectas tangentes.

Derivamos en forma implícita:

$$-sen(x + y) \cdot (1 + y') + cos(x + y) \cdot (1 - y') = 0 \to$$

$$\to -sen(x + y) - y'\, sen(x + y) + cos(x + y) - y'\, cos(x + y) = 0 \to y' = \frac{-sen\,(x + y) + cos\,(x + y)}{sen\,(x + y) + cos\,(x + y)}$$

$$x = \frac{\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \to y' = \frac{-sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$$

$$x = \frac{\pi}{4},\ y = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \to y' = \frac{-sen\ \pi + cos\ \pi}{sen\ \pi + cos\ \pi} = 1$$

c) Tomamos logaritmos y derivamos:

$$ln\ y = (x + 1) \cdot ln\,(ln\ x) \to \frac{y'}{y} = ln\,(ln\ x) + (x + 1) \cdot \frac{1}{x \cdot ln\ x} \to y' = (ln\ x)^{x+1}\left(ln\,(ln\ x) + \frac{(x + 1)}{x \cdot ln\ x}\right)$$

$$x = 1 \to y' = 0$$

d) Tomamos logaritmos y derivamos:

$$ln\ y = 2x\ ln\,(arc\ tg\ x) \to \frac{y'}{y} = 2\ ln\,(arc\ tg\ x) + 2x \cdot \frac{1}{(1 + x^2)\ arc\ tg\ x} \to$$

$$\to y' = (arc\ tg\ x)^{2x}\left(2\ ln\,(arc\ tg\ x) + \frac{2x}{(1 + x^2)\ arc\ tg\ x}\right) \to$$

$$\to y' = (arc\ tg\ 1)^2\left(2\ ln\,(arc\ tg\ 1) + \frac{2}{(1 + 1)^2\ arc\ tg\ 1}\right) = \frac{\pi^2}{16}\left(2\ ln\,\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\right)$$

e) Calculamos primero las ordenadas de los puntos:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{49}{81} = 1 \to y = \frac{5\sqrt{130}}{9}, \; y = -\frac{5\sqrt{130}}{9}$$

Derivamos en forma implícita:

$$\frac{2yy'}{25} - \frac{2x}{81} = 0 \to \frac{yy'}{25} = \frac{x}{81} \to y' = \frac{25x}{81y}$$

$$x = 7, \; y = \frac{5\sqrt{130}}{9} \to y' = \frac{25 \cdot 7}{81 \cdot \frac{5\sqrt{130}}{9}} = \frac{7\sqrt{130}}{234}$$

$$x = 7, \; y = -\frac{5\sqrt{130}}{9} \to y' = -\frac{7\sqrt{130}}{234}$$

f) Tomamos logaritmos y derivamos:

$$\ln y = \ln x \ln \sqrt{x} = \ln x \ln (x^{1/2}) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \to \frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x} \to$$

$$\to y' = (\sqrt{x})^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$x = e^2 \to y' = (\sqrt{e^2})^{\ln e^2} \cdot \frac{\ln e^2}{e^2} = 2$$

g) La función se deriva tomando logaritmos. El resultado es el siguiente:

$$y' = \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^x \left(\frac{x \cos x}{sen\, x} + \ln\left(\frac{sen\, x}{x}\right) - 1\right)$$

Es decir, y' no está definida en el punto indicado.

h) Calculamos primero las ordenadas de los puntos:

$$\frac{25}{36} + \frac{y^2}{49} = 1 \to y = \frac{7\sqrt{11}}{6}, \; y = -\frac{7\sqrt{11}}{6}$$

Derivamos en forma implícita:

$$\frac{2x}{36} + \frac{2yy'}{49} = 0 \to \frac{yy'}{49} = -\frac{x}{36} \to y' = -\frac{49x}{36y}$$

$$x = 5, \; y = \frac{7\sqrt{11}}{6} \to y' = -\frac{49 \cdot 5}{36 \cdot \frac{7\sqrt{11}}{6}} = -\frac{35\sqrt{11}}{66}$$

$$x = 5, \; y = -\frac{7\sqrt{11}}{6} \to y' = \frac{35\sqrt{11}}{66}$$

62 Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = sen\, 2x$ se anulan en el origen de coordenadas.

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

$$f''(x) = -4 sen\, 2x = -2^2 \cdot sen\, 2x$$

$$f'''(x) = -8\cos 2x = -2^3 \cdot \cos 2x$$

$$f^{4)}(x) = 16 sen\, 2x = 2^4 \cdot sen\, 2x$$

…

En general, las derivadas de orden par son de la forma: $f^{n)}(x) = k \cdot sen\, 2x$, donde k es constante.

Por tanto, se anulan todas en $x = 0$, puesto que $sen\, 0 = 0$. Como $f(0) = 0$, tenemos que todas las derivadas de orden par de $f(x)$ se anulan en el origen de coordenadas.

63 Calcula el valor aproximado de las siguientes expresiones utilizando el diferencial:

a) $\sqrt{122}$ **b)** $\sqrt{1\,370}$ **c)** $\log_2 130$

d) $\sqrt[4]{260}$ **e)** $\sqrt[3]{103\,825}$ **f)** $3^{4,001}$

a) Sea $f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $dx_0 = 1$.

$$\sqrt{122} = f(122) = f(121) + df(121) = 11 + \frac{1}{2\sqrt{121}} \cdot 1 = 11{,}045$$

b) Sea $f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $dx_0 = 1$.

$$\sqrt{1\,370} = f(1\,369) = f(1\,369) + df(1\,269) = 37 + \frac{1}{2\sqrt{1\,369}} \cdot 1 = 37{,}014$$

c) Sea $f(x) = \log_2 x \to f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2}$; $dx_0 = 2$.

$$\log_2 130 = f(130) = f(128) + df(128) = 7 + \frac{1}{128 \ln 2} \cdot 2 = 7{,}0225$$

d) Sea $f(x) = \sqrt[4]{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; $dx_0 = 4$.

$$\sqrt[4]{260} = f(260) = f(256) + df(256) = 4 + \frac{1}{4\sqrt[4]{256^3}} \cdot 4 = 4{,}3536$$

e) Sea $f(x) = \sqrt[3]{x} \to f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $dx_0 = 2$.

$$\sqrt[3]{103\,825} = f(103\,825) = f(103\,823) + df(103\,823) = 47 + \frac{1}{3\sqrt[3]{103\,823}} \cdot 2 = 47{,}0003$$

f) Sea $f(x) = 3^x \to f'(x) = 3^x \ln 3$; $dx_0 = 0{,}001$.

$$3^{4{,}001} = f(4{,}001) = f(4) + df(4) = 81 + 3^4 \ln 3 \cdot 0{,}001 = 81{,}089$$

64 Halla, aproximadamente (mediante diferenciales), el volumen de un cubo de 4,012 dm de lado.

$V = 4{,}012^3$ dm^3

Si $f(x) = x^3 \to f'(x) = 3x^2$; $dx_0 = 0{,}012$.

$$4{,}012^3 = f(4{,}012) = f(4) + df(4) = 64 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0{,}012 = 64{,}576 \text{ dm}^3$$

65 Determina el aumento de volumen que experimenta un ortoedro de 15 dm de altura y cuya base es un cuadrado de 20 dm de lado sabiendo que aumenta 1 cm la longitud del lado. Hazlo de forma exacta y de forma aproximada (utilizando diferenciales).

El volumen en función del lado de la base, teniendo en cuenta que la altura es 15 dm, es $15l^2$ dm^3.

Aumento:

$$\Delta V = 15(l + \text{h})^2 - 15l^2 = 15l^2 + 30l\text{h} + 15\text{h}^2 - 15l^2 = 30l\text{h} + 15\text{h}^2$$

De forma exacta:

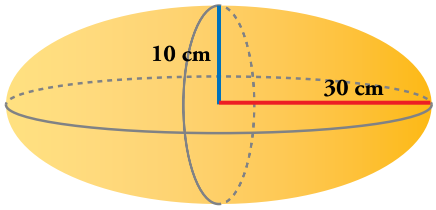
$$l = 20,\ \text{h} = 0{,}1 \to 30 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + 15 \cdot (0{,}1)^2 = 60{,}15 \text{ dm}^3$$

Usando diferenciales:

$$V'(l) = 30l$$

$$dV = V'(l) \cdot \text{h} = 30 \cdot 20 \cdot 0{,}1 = 60 \text{ dm}^3$$

66 **a) Halla usando diferenciales el incremento de volumen que sufre el siguiente elipsoide al aumentar el radio de la sección circular en 1 mm.**



* ***Recuerda que en un elipsoide:*** $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

b) Calcula, también utilizando diferenciales, el incremento de volumen que sufre el elipsoide al aumentar el semieje mayor en 1 mm.

a) $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Si incrementamos la sección circular, obtenemos:

$$V'(a) = \frac{8}{3}\pi ab \rightarrow dV = V'(a)\cdot \text{h} = \frac{8}{3}\pi ab\text{h} = \frac{8}{3}\pi \cdot 10 \cdot 30 \cdot 0{,}1 = 251{,}33 \text{ cm}^3$$

b) Si incrementamos el semieje mayor:

$$V'(b) = \frac{4}{3}\pi a^2 \rightarrow dV = V'(b)\cdot \text{h} = \frac{4}{3}\pi a^2\text{h} = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 0{,}1 = 41{,}89 \text{ cm}^3$$

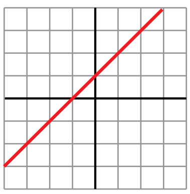
67 **Prueba la igualdad** $D\left[arc\ tg\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\right] = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

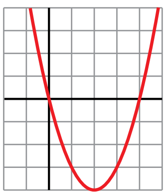
$$D\left[arc\ tg\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{\left(1 + \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 2}{4}\right)\cdot 2} =$$

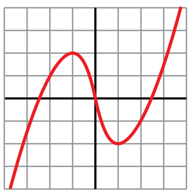
$$= \frac{(e^x + e^{-x})\cdot 4}{(e^{2x} + e^{-2x} + 2)\cdot 2} = \frac{(e^x + e^{-x})\cdot 2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Cuestiones teóricas

68 **Dibuja un boceto de la derivada de cada función:**

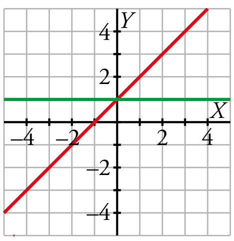
a) 

b) 

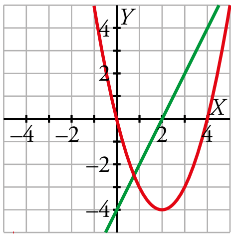
c) 

a) La función dada es una recta con pendiente 1.

Su derivada es la recta $y = 1$.



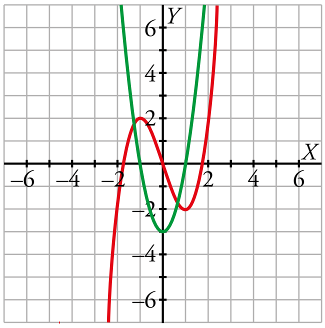
b) La función es una función polinómica de grado 2 que alcanza su mínimo en el punto de abscisa $x = 2$. Su derivada es una función polinómica de grado 1 que corta al eje horizontal en $x = 2$.



Como la función decrece cuando $x < 2$, su derivada es negativa cuando $x < 2$ (queda por debajo del eje horizontal). Análogamente se puede razonar cuando $x > 2$.

c) La función dada tiene la forma de una función polinómica de grado 3 cuyos extremos relativos están en $x = 1$ y $x = -1$.

Su derivada es una función polinómica de grado 2 (una parábola) que corta al eje horizontal en esos mismos puntos para que $x = 1$ y $x = -1$ anulen la derivada primera.



69 **¿Cuántos puntos de derivada nula puede tener una función polinómica de tercer grado? ¿Es posible que no tenga ninguno? ¿Es posible que solo tenga uno?**

Como la derivada de una función polinómica de tercer grado es una función polinómica de segundo grado, tiene un máximo de dos puntos de derivada nula.

Puede ser que no tenga puntos de derivada nula. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 + x$ no tiene puntos de derivada nula porque $f'(x) = 3x^2 + 1$ nunca se anula.

También puede tener un único punto con derivada nula. Por ejemplo, la función $f(x) = (x-2)^3$ solo tiene un punto de derivada nula porque $f'(x) = 3(x-2)^2$ solo se anula cuando $x = 2$.

70 **Justifica que una función polinómica de segundo grado tiene siempre un punto de tangente horizontal.**

La derivada de una función polinómica de segundo grado es una función polinómica de primer grado. Si $f(x)$ es la función, entonces $f'(x) = ax + b$ con $a \neq 0$.

En tal caso, la ecuación $f'(x) = 0 \to ax + b = 0$ siempre tiene solución y esa es la abscisa del punto de derivada nula.

71 **Sea $f(x) = x^3$ y a un punto cualquiera. La función que mide la diferencia entre f y la tangente a la gráfica en el punto (a, a^3) es $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.**

a) Prueba que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{x-a} = 0$.

b) Prueba que si f es una función cualquiera, también se verifica el resultado anterior. Haz una gráfica explicativa.

a) $$\frac{g(x)}{x-a} = \frac{x^3 - 3a^2(x-a) - a^3}{x-a} = \frac{x^3 - a^3 - 3a^2(x-a)}{x-a} = \frac{(x^2 + ax + a^2)(x-a) - 3a^2(x-a)}{x-a} =$$

$$= \frac{(a^2 + ax + x^2 - 3a^2)(x-a)}{x-a} = a^2 + ax + x^2 - 3a^2 \to$$

$$\to \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} (a^2 + ax + x^2 - 3a^2) = 3a^2 - 3a^2 = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} =$

$= \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - \dfrac{f'(a)(x-a)}{x-a} \right) = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) \right) =$

$= f'(a) - f'(a) = 0$

72 ¿Verdadero o falso?

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h) - f(a)}{h} = -f'(a)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - f(a)}{h} = 2f'(a)$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = f'(a)$

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{f(a-h) - f(a)}{-h} \right) = -f'(a) \to$ Verdadero.

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \left(2 \cdot \dfrac{f(a+2h) - f(a)}{2h} \right) = 2 \cdot f'(a) \to$ Verdadero.

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+2h) - f(a) + f(a) - f(a+h)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{f(a+2h) - f(a)}{h} - \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) =$

$= 2 \cdot f'(a) - f'(a) = f'(a) \to$ Verdadero.

73 Considera la función $f(x) = x\,g(x)$. Si $g(x)$ es continua en 0, prueba que $f(x)$ es derivable en 0 y calcula su derivada. (No supongas que $g(x)$ es derivable; puede no serlo).

Como $g(x)$ es continua en 0, se cumple que:

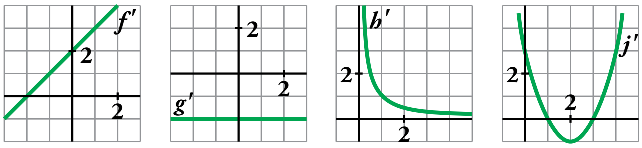
$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, tenemos que comprobar que coinciden los límites laterales siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x \cdot g(x) - g(0) \cdot 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x \cdot g(x) - g(0) \cdot 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) \end{array}\right\}$$

Los límites laterales coinciden al ser $g(x)$ continua, luego existe $f'(0)$.

74 **Estas gráficas son las funciones derivadas de f, g, h y j:**



a) ¿Cuáles de esas funciones (f, g, h y j) tienen puntos de tangente horizontal?

b) ¿Cuál de estas gráficas es la función derivada de una función polinómica de primer grado?

c) ¿Cuál de ellas corresponde a una función polinómica de segundo grado?

d) ¿Alguna puede ser polinómica de tercer grado?

e) ¿Alguna de las funciones puede ser $y = \ln x$?

a) Los puntos de tangente horizontal son los puntos en los que se anula la derivada.

f tiene un punto de tangente horizontal en $x = -2$, pues $f'(-2) = 0$.

j tiene dos puntos de tangente horizontal en $x = 1$ y en $x = 3$, pues $j'(1) = j'(3) = 0$.

g y h no tienen ningún punto de tangente horizontal.

b) La derivada de una función polinómica de primer grado es una función constante. Por tanto, es g'.

c) La derivada de una función polinómica de segunda grado es una función polinómica de primer grado. Por tanto, es f'.

d) Como j' tiene forma de parábola, al ser una función polinómica de segundo grado, la función j es polinómica de tercer grado.

e) $D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$ y se corresponde con la función h' ya que tiene forma de hipérbola.

Por tanto, h puede ser la función logaritmo neperiano.

Página 267

Para profundizar

75 **Demuestra que f es derivable en $x = 0$ y que g no lo es:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \, sen \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x \, sen \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Usando la definición de derivada:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \, sen\,(1/h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[h \, sen\left(\frac{1}{h}\right) \right] = 0$$

ya que la función seno está acotada $\to$ $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

De nuevo, mediante la definición de derivada:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \, sen\,(1/h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[sen\left(\frac{1}{h}\right) \right]$$

No existe ya que el seno oscila cuando el ángulo crece indefinidamente; por tanto, $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

76 **Sean f y g dos funciones tales que $f(x) = x^2 + 1$ y $g'(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(0) = 4$. Calcula:**

a) $(f \circ g)'(0)$ **b)** $(g \circ f)'(0)$ **c)** $(g^{-1})'(4)$ **d)** $(f^{-1})'(5)$

a) $(f \circ g)'(0) = f'[g(0)] \cdot g'(0) = 2 \cdot g(0) \cdot g'(0) = 2 \cdot 4 \cdot cos\, 0 = 8$

b) $(g \circ f)'(0) = g'[f(0)] \cdot f'(0) = g'(1) \cdot 2 \cdot 0 = 0$

c) $(g^{-1})'(4) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(4))} = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{cos\, 0} = 1$

d) Para que f sea inyectiva y se pueda determinar la función recíproca, supondremos que $x > 0$.

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

77 **Las funciones siguientes:**

$$senh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\quad cosh\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\quad tgh\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

se denominan seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica.

Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades:

a) $cosh^2\,(x) - senh^2\,(x) = 1$

b) $senh\,(x + y) = senh\,x\; cosh\,y + cosh\,x\; senh\,y$

c) $cosh\,(x + y) = cosh\,x\; cosh\,y + senh\,x\; senh\,y$

d) $senh'\,x = cosh\,x$

e) $cosh'\,x = senh\,x$

f) $tgh'\,x = \dfrac{1}{cos\,h^2\,x}$

a) $cosh^2\,x - senh^2\,x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

b) $senh\,x \cdot cosh\,y + cosh\,x \cdot senh\,y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} =$

$= \dfrac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} + \dfrac{e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} =$

$= \dfrac{2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = senh\,(x + y)$

c) $cosh\,x \cdot cosh\,y + senh\,x \cdot senh\,y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} =$

$= \dfrac{e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} + \dfrac{e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} =$

$= \dfrac{2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}}{4} = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = cosh\,(x + y)$

d) $senh'\,x = D\left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\,x$

e) $cosh'\,x = D\left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\,x$

f) $tgh'\,x = D\left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$

$= \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \dfrac{1}{cosh^2\,x}$

78 **Sea $f(x) = arc\ cos\ \sqrt{x}$.**

a) Calcula a partir de su función inversa, la derivada de esta función.

b) Halla $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ sin utilizar $f'(x)$.

c) Comprueba el resultado de b) a partir del de a).

$y = arc\ cos\ \sqrt{x} \ \to\ x = arc\ cos\ \sqrt{y} \ \to\ cos\ x = \sqrt{y} \ \to\ y = cos^2\ x \ \to\ (f^{-1})(x) = cos^2\ x$

$(f^{-1})'(x) = -2cos\ x \cdot sen\ x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{-2cos\,(arc\ cos\ \sqrt{x}) \cdot sen\,(arc\ cos\ \sqrt{x})} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-\sqrt{x}^2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = arc\ cos\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

$f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{-2cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -1$

c) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}}} = -1$

79 **Prueba, utilizando la definición de derivada, que la siguiente función es derivable en $x = 1$ y no lo es en $x = -1$:**

$$f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$$

El dominio de definición es el intervalo $[-1, 1]$. Por tanto, el enunciado se refiere a las derivadas laterales en los puntos dados.

Veamos primero si existe la derivada por la izquierda en $x = 1$:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1-1-h)\sqrt{1-(1+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h\sqrt{-2h-h^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (-\sqrt{-2h-h^2}) = 0 \ \to\ \text{Existe la derivada y } f'(1^-) = 0.$$

Veamos ahora la existencia de la derivada lateral por la derecha en $x = -1$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+1-h)\sqrt{1-(-1+h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(2-h)\sqrt{2h-h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[(2-h)\sqrt{\frac{2h-h^2}{h^2}}\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left[(2-h)\sqrt{\frac{2}{h}-1}\right] = +\infty \ \to\ \text{No existe } f'(-1^+).$$

80 **Se dice que a es una raíz doble de la función polinómica f, cuando:**

$f(x) = (x-a)^2 g(x)$, donde g es una función polinómica

a) Prueba que si f tiene una raíz doble, a, entonces $f'(a) = 0$.

b) Recíprocamente, prueba que si a es raíz de f' y de f, entonces a es una raíz doble de f.

a) Supongamos que $f(x)$ tiene una raíz doble $\to f(x) = (x-a)^2 g(x)$.

Entonces $f'(x) = 2(x-a)\, g(x) + (x-a)^2 g'(x) = (x-a)\,[2g(x) + (x-a)g'(x)]$.

Por tanto, $f'(a) = (a-a)\,[2g(a) + (a-a)g'(a)] = 0$.

b) Supongamos que $x = a$ es raíz de $f'(x)$. Entonces $f'(x) = (x-a)h(x)$.

Por otra parte, si $x = a$ es raíz de $f(x)$, se tiene que $f(x) = (x-a)j(x)$.

Derivando esta última expresión obtenemos que:

$$f'(x) = j(x) + (x-a)\,j'(x)$$

Sustituimos $f'(x)$ en la igualdad anterior:

$$(x-a)\,h(x) = j(x) + (x-a)\,j'(x) \;\to\; j(x) = (x-a)\,h(x) - (x-a)\,j'(x) = (x-a)[h(x) - j'(x)]$$

Sustituimos de nuevo $j(x)$ en la expresión de $f(x)$ y obtenemos:

$$f(x) = (x-a)\,j(x) = (x-a)(x-a)[h(x) - j'(x)] = (x-a)^2\,[h(x) - j'(x)]$$

Así queda probado que $x = a$ es una raíz doble de $f(x)$.

81 Halla la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones:

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \ln(1+x)$

a) $y' = a\,e^{ax};\; y'' = a^2\,e^{ax};\; y''' = a^3\,e^{ax};\; \dots\; y^{n)} = a^n\,e^{ax}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = a^{n-1}\,e^{ax}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = a \cdot a^{n-1}\,e^{ax} = a^n\,e^{ax}$, como queríamos demostrar.

b) $y' = \dfrac{-1}{x^2};\; y'' = \dfrac{2}{x^3};\; y''' = \dfrac{-6}{x^4};\; \dots\; y^{n)} = \dfrac{(-1)^n\,n!}{x^{n+1}}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\,(-1) \cdot n}{x^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$, como queríamos demostrar.

c) $y' = \dfrac{1}{1+x};\; y'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2};\; y''' = \dfrac{2}{(1+x)^3};\; \dots\; y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}$

Lo demostramos por inducción: (para $n = 1, 2, 3$ se cumple).

Si $y^{n-1)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!}{(1+x)^{n-1}}$, derivando obtenemos:

$y^{n)} = \dfrac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)!\,(-1)\,(n-1)}{(1+x)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$, como queríamos demostrar.

82 Halla la derivada de la siguiente función y comprueba que es una constante:

$$y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \quad \text{con} \quad 0 \le x < \pi$$

Justifícalo teniendo en cuenta la fórmula de $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$**.**

Si $0 \le x \le \pi \;\to\; 0 \le \dfrac{x}{2} \le \dfrac{\pi}{2} \;\to\; tg\,\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Así: $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \operatorname{arc\,tg}\left(tg\,\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$

Por tanto: $y' = \dfrac{1}{2}$

Autoevaluación

Página 267

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x + 2)\sqrt{x-1}$ **b)** $y = arc\ tg\ \dfrac{x+3}{x-3}$ **c)** $y = ln\,(sen\ x)^2$

d) $y = \sqrt[3]{2^{x-1}}$ **e)** $y = (tg\ x)^{1-x}$ **f)** $x^2 + y^2 - xy = 0$

a) $y' = 2\sqrt{x-1} + (2x+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2(x-1)+x+1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$

b) $$y' = \frac{D\left(\dfrac{x+3}{x+3}\right)}{1+\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^2} = \frac{\dfrac{-6}{(x-3)^2}}{\dfrac{(x-3)^2+(x+3)^2}{(x-3)^2}} = \frac{-6}{2x^2+18} = \frac{-3}{x^2+9}$$

c) Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$y = ln\,(sen\ x)^2 = 2\ \ ln\,(sen\ x)\ \ \to\ \ y' = 2\cdot\frac{cos\ x}{senx}$$

d) Expresando la raíz como potencia:

$$y = \sqrt[3]{2^{x-1}} = 2^{(x-1)/3}\ \ \to\ \ y' = D\left(\frac{x-1}{3}\right)\cdot 2^{(x-1)/3}\cdot ln\ 2 = \frac{ln\ 2}{3}\cdot 2^{(x-1)/3}$$

e) Aplicamos la derivación logarítmica:

$$ln\ y = (1-x)\ ln\,(tg\,x)\ \to\ \frac{y'}{y} = -ln\,(tg\ x) + (1-x)\,\frac{D(tg\ x)}{tg\ x}\ \to$$

$$\to\ \frac{y'}{y} = -ln\,(tg\ x) + (1-x)\,\frac{1+tg^2\ x}{tg\ x}\ \to$$

$$\to\ y' = \left[-ln\,(tg\ x) + \frac{(1-x)\,(1+tg^2\ x)}{tg\ x}\right](tg\ x)^{1-x} =$$

$$= -(tg\ x)^{1-x}\ ln\,(tg\ x) + (1-x)\,(1+tg^2\ x)\,(tg\ x)^{-x}$$

f) Derivamos implícitamente:

$$x^2 + y^2 - xy = 0\ \to\ 2x + 2yy' - y - xy' = 0\ \to\ (2y-x)\,y' = y - 2x\ \to\ y' = \frac{y-2x}{2y-x}$$

2 Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ siendo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2\cdot x^2} = \frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2h} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

3 Dada la función:

$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x|$$

defínela por intervalos y obtén:

a) $f'(x)$

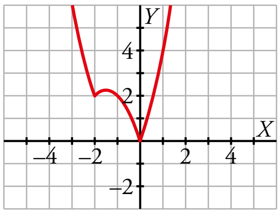
b) $f''(x)$

Representa $f(x)$, $f'(x)$ **y** $f''(x)$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 2x & \text{si } -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

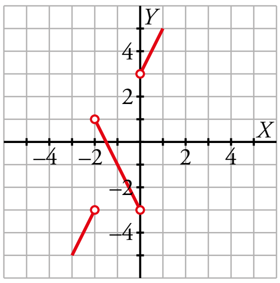
$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 3x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f(x)$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ y $x = 0$ ya que los puntos son angulosos. La derivada es:

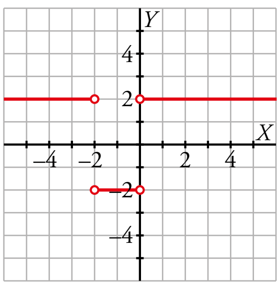
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x - 3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f'(x)$

Al no existir $f'(-2)$ ni $f'(0)$, no existen $f''(-2)$ ni $f''(0)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f''(x)$

4 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

Represéntala.

Continuidad:

- En $x \neq 1$: La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$ y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$: La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

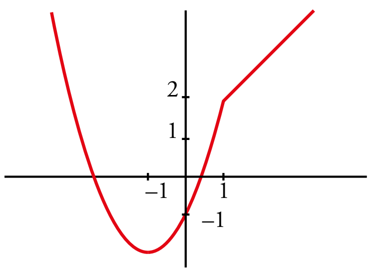
Puntos en los que $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 2x + 2$ si $x < 1$

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$f'(x) = 1$ si $x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0$ si $x > 1$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.



Gráfica de $f(x)$

5 **Halla a y b para que $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b que has obtenido, estudia su derivabilidad.

• Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:

La función es continua, pues está formada por polinomios.

• En $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $-2 + a = -a + b$; es decir: $b = 2a - 2$.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \text{ Para que sea continua, ha de ser } b = 2.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ es decir: } f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

• Si $x \neq 0$:

Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

• En $x = 0$:

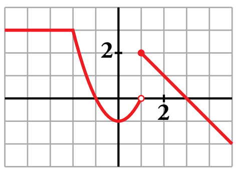
$$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$$

La función no es derivable en $x = 0$.

Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

6 **Observando la gráfica de esta función f, estudia su derivabilidad.**

Halla, si existen, $f'(-4)$, $f'(0)$ y $f'(3)$.



• f es discontinua en $x = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

En $x = -2$ observamos que $f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$: tampoco es derivable.

Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

• $f'(-4) = 0$ porque en ese punto la función es constante.

$f'(0) = 0$ porque en $x = 0$ observamos un mínimo, luego la tangente es horizontal.

$f'(3) = -1$ porque -1 es la pendiente de la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(3, 0)$:

$$m = \frac{2 - 0}{1 - 3} = -1$$