Junio de 2018. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(a+4)y+(a+1)z=0 \\ -(a+2)y+(a^2+3a+2)z=a+4 \end{cases}$$

(3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a+4 & a+1 & 0 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 & a+4 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & a+2 & a+1 & -1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 & a+4 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{a+2} & a+1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2+4a+3} & a+3 \end{array}\right) \overset{3}{\to}$$

$$\to \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ a^2+4a+3=0 \Rightarrow a=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{-4\pm2}{2}=\begin{cases} a=-1 \\ a=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-3, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+2y=1 \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y=1-2+4z=-1+4z \\ y=1-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+4\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=-2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) Si a=-1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ (a+2)y+(a+1)z=-1 \\ (a+3)(a+1)z=a+3 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{a+3}{(a+3)(a+1)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a+1}} \Rightarrow (a+2)y=-1-(a+1)z=$$

$$=-1-(a+1)\cdot\frac{1}{a+1}=-1-1=-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-2}{a+2}} \Rightarrow x=1-2y=1-2\cdot\frac{-2}{a+2}=1+\frac{4}{a+2}=$$

$$=\frac{a+2+4}{a+2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+6}{a+2}}$$

1 2ªf-1ªf.

2 3ªf+2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

4 3ªf-2ªf.

Junio de 2018. Problema A2.

Sean los puntos P(7,4,2), Q(1,2,-2) y R(2,1,-3). Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los otros dos vértices restantes. (2 Puntos)

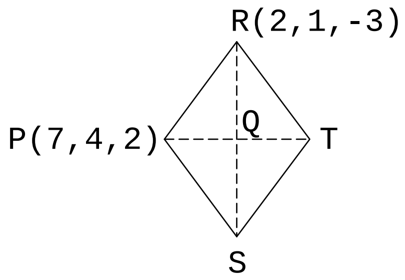
Calculamos los vectores:

$$[\overrightarrow{PQ}]=(-6,-2,-4),\ [\overrightarrow{PR}]=(-5,-3,-5)\ \text{y}\ [\overrightarrow{QR}]=(1,\ -1,\ -1)$$

Es fácil ver que $[\overrightarrow{PQ}]$ y $[\overrightarrow{QR}]$ son ortogonales:

$$[\overrightarrow{PQ}]\cdot[\overrightarrow{QR}]=-6+2+4=0$$

Por tanto, Q es el centro del rombo:



Si S(x,y,z), como Q(1,2,-2) es el punto medio del segmento RS:

$$\frac{2+x}{2}=1,\ \frac{1+y}{2}=2,\ \frac{-3+z}{2}=-2 \quad\Rightarrow\quad x=0,\ y=3,\ z=-1 \quad\Rightarrow\quad S(0,3,-1)$$

Si T(x,y,z), como Q(1,2,-2) es el punto medio del segmento PT:

$$\frac{7+x}{2}=1,\ \frac{4+y}{2}=2,\ \frac{2+z}{2}=-2 \quad\Rightarrow\quad x=-5,\ y=0,\ z=-6 \quad\Rightarrow\quad T(-5,0,-6)$$

Junio de 2018. Problema A3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos(3x)}\cdot \operatorname{sen}(3x)\cdot dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}\cdot dx \qquad \text{(2 Puntos)}$$

a)

$$\int e^{\cos(3x)}\cdot \operatorname{sen}(3x)\cdot dx \overset{1}{=} -\frac{1}{3}\cdot\int e^t\cdot dt \overset{2}{=} -\frac{1}{3}\cdot e^t + C \overset{3}{=} -\frac{1}{3}\cdot e^{\cos(3x)} + C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{3}\cdot e^{\cos(3x)}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot e^{\cos(3x)}\cdot\big(\cos(3x)\big)' = -\frac{1}{3}\cdot e^{\cos(3x)}\cdot\big(-3\cdot \operatorname{sen}(3x)\big) =$$

$$= e^{\cos(3x)}\cdot \operatorname{sen}(3x)$$

b)

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}\cdot dx \overset{4}{=} -\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1+t^2}\cdot dt \overset{5}{=} -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg} t + C \overset{2}{=} -\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\cos(2x) + C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arc\,tg}\cos(2x)\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos^2(2x)}\cdot\big(\cos(2x)\big)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos^2(2x)}\cdot\big(-2\cdot \operatorname{sen}(2x)\big) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)}$$

---

1 Hacemos el cambio de variable $\cos(3x)=t \Rightarrow -3\cdot \operatorname{sen}(3x)\cdot dx = dt$.

2 La integral es inmediata de tipo exponencial.

3 Deshacemos el cambio.

4 Hacemos el cambio $\cos(2x)=t \Rightarrow -2\cdot \operatorname{sen}(2x)\cdot dx = dt$.

5 La integral es inmediata de tipo arco tangente.

JUNIO DE 2018. PROBLEMA A4.

Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}$. (3 PUNTOS)

ASÍNTOTAS:

■ La recta x=1 es una asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2x^2+6}{x-1} = \frac{8}{0^+}=+\infty;\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2x^2+6}{x-1} = \frac{8}{0^-}=-\infty$$

■ La recta y=2x+2 es asíntota oblicua de la función en +∞ y en -∞. Para verlo, se puede seguir uno de los dos métodos siguientes:

PRIMER MÉTODO:

- $k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+6}{x-1} \overset{1}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(2x)=\pm\infty$
- $m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+6}{x^2-x} \overset{2}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 2=2$
- $b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+6-2x^2+2x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+6}{x-1}\overset{3}{=}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}2=2$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como se trata de una función racional (cociente de polinomios), puede hallarse la asíntota oblicua del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+6 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x^2+2x & 2x+2 \\ \cline{1-1} 2x+6 & \\ -2x+2 & \\ \cline{1-1} 8 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1} \overset{4}{=} 2x+2+\frac{8}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+2)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{x-1}=\frac{8}{\pm\infty}=0$$

EXTREMOS RELATIVOS:

1º) Derivamos la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+6)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-4x-2x^2-6}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2} \overset{5}{=} \frac{2(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

---

1 $2x^2+6 \sim 2x^2$ y $x-1\sim x$ en +∞ y en -∞.

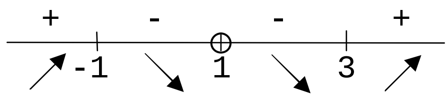
2 $2x^2+6\sim x^2$ y $x^2-x\sim x^2$ en +∞ y en -∞.

3 $2x+6\sim 2x$ y $x-1\sim x$ en +∞ y en -∞.

4 Ya que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.

5 Hemos calculado las raíces del numerador y lo hemos descompuesto en factores.

2º) Estudiamos el signo de la derivada:



3º) Por el criterio de la variación del signo de la primera derivada:

- En x=-1 la función tiene un máximo relativo que vale y=-4.
- En x=3 la función tiene un mínimo relativo que vale y=12.

Junio de 2018. Problema B1.

Dada la matriz A tal que $|A|=-1$, calcula el determinante de la matriz $A^2\cdot B^t$:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos el determinante de la matriz $A^2\cdot B^t$:

$$|A^2\cdot B^t| \overset{1}{=} |A^2|\cdot|B^t| \overset{2}{=} |A|^2\cdot|B|=(-1)^2\cdot|B|=|B|=$$

$$=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} \overset{3}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} \overset{4}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} \overset{5}{=}$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{6}{=} -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{7}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=2\cdot|A|=-2$$

---

1 El determinante de un producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes de las matrices factores.

2 Para calcular el determinante de A^2 aplicamos lo dicho en la nota anterior. Para calcular B^t recordemos que el determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta.

3 2ªf+1ªf.

4 Dividimos la segunda fila por 2 y multiplicamos al determinante por 2.

5 3ªf-2ªf.

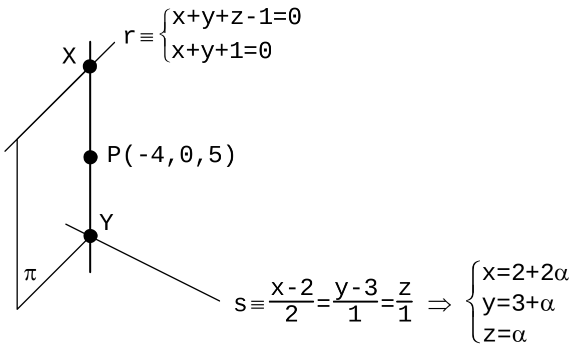
6 Al cambiar entre sí la primera fila y la última, el determinante cambia de signo.

7 Al multiplicar la primera fila por -1, el determinante cambia de signo.

JUNIO DE 2018. PROBLEMA B2.

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(-4,0,5) y corta a las rectas $r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\x+y+1=0\end{cases}$ y $s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ (3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta buscada con r y s, respectivamente:[1]



El punto P y la recta r determinan el plano π. Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r, tiene por ecuación:[2]

$$\pi\equiv a(x+y+z-1)+b(x+y+1)=0$$

Como el punto P(-4,0,5) está en el plano π, satisface su ecuación:

$$a(-4+0+5-1)+b(-4+0+1)=0 \Rightarrow -3b=0 \Rightarrow b=0$$

Por tanto:

$$\pi\equiv x+y+z-1=0$$

Como el punto Y está en la recta s:

$$Y(2+2\alpha,3+\alpha,\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$2+2\alpha+3+\alpha+\alpha-1=0 \Rightarrow 4\alpha+4=0 \Rightarrow 4\alpha=-4 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(0,2,-1) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(4,2,-6) \Rightarrow XY\equiv\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}$$

[1] Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

[2] Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r.

JUNIO DE 2018. PROBLEMA B3.

Demuestra que existe $\alpha\in(2,3)$ tal que $f(\alpha)=-3/2$, siendo $f(x)=\cos(\pi x)\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

PRIMER MÉTODO:

Como la función f cumple las condiciones de la propiedad de Darboux, existe α en (2,3) tal que $f(\alpha)=-3/2$.

En efecto:

1ª) $f(3)<-3/2<f(2)$:

- $f(2)=\cos(2\pi)\cdot(-1)=-1$.
- $f(3)=\cos(3\pi)\cdot 2=-2$.

2ª) f es continua en [2,3]:

- $[2,3]\subset Dom(f)=R$.
- Si $a\in[2,3]$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left(\cos(\pi x)\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}\right)=\cos(\pi a)\cdot\sqrt[3]{a^3-2a^2-1}=f(a)$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como la función[1] $g(x)=f(x)+3/2$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (2,3) tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f(\alpha)+3/2=0 \Rightarrow f(\alpha)=-3/2$$

En efecto:

1ª) $g(2)\cdot g(3)<0$:

- $g(2)=-1+3/2=1/2>0$
- $g(3)=-2+3/2=-1/2<0$

2ª) g es continua en [2,3]:

- $[2,3]\subset Dom(g)=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[2,3]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left[\cos(\pi x)\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}+\frac{3}{2}\right]=\cos(\pi a)\cdot\sqrt[3]{a^3-2a^2-1}+\frac{3}{2}=g(a)$$

[1] Si hay que probar que existe α tal que $f(\alpha)=-3/2$, es decir, tal que $f(\alpha)+3/2=0$, hay que considerar una función que se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)+3/2$.

Junio de 2018. Problema B4.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones f y g. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas:

$f(x)=-x^2+3x$ $\qquad g(x)=\begin{cases} x/2 & \text{si } x\le 2 \\ 3-x & \text{si } x>2 \end{cases}$ (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

- Si $x\le 2$:

$$\begin{cases} y=-x^2+3x \\ y=x/2 \end{cases} \Rightarrow -x^2+3x=\frac{x}{2} \Rightarrow -2x^2+6x=x \Rightarrow 2x^2-5x=0 \Rightarrow x(2x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5/2 \end{cases}$$

- Si $x>2$:

$$\begin{cases} y=-x^2+3x \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow -x^2+3x=3-x \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte son $x=0$ $(0\le 2)$ y $x=3$ $(3>2)$.

2º) Averiguamos entre 0 y 2 y entre 2 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
1	2	1/2
5/2	5/4	1/2

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^2(-x^2+3x-x/2)\cdot dx+\int_2^3(-x^2+3x-3+x)\cdot dx=$$

$$=\int_0^2\left(-x^2+\frac{5}{2}\cdot x\right)\cdot dx+\int_2^3(-x^2+4x-3)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^2+\left[-\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}-3x\right]_2^3=$$

$$=\left[\left(-\frac{8}{3}+5\right)-0\right]+\left[(-9+18-9)-\left(-\frac{8}{3}+8-6\right)\right]=\frac{7}{3}+0+\frac{2}{3}=3$$