Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EKAINA — ORDINARIA 2020

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

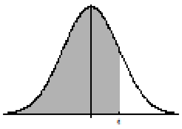
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una Unica pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S=\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Dada la recta

$r=\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases}$, y el plano $\pi=3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

a) hallar ∝ para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

Ejercicio B2

Hallar el punto Q, simétrico de $P=(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x, & x\le 2 \\ x^2-bx-4, & x>2 \end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^2e^{2x}$.
Encontrar sus extremos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y=3-x^2$ y por la recta $y=2x$. Calcular su área.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x\cos(3x)dx$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10;\ 0{,}1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Ejercicio B5

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S=\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}=3A+16+8-12-2A-16=A-4$.

El determinante es nulo cuando $A=4$.

Estudiamos dos situaciones distintas.

CASO 1. $A\neq 4$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Para resolverlo utilizamos el método de Cramer.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2A \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & A & 4A \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2A & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4A & 4 & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}}=\frac{6A^2+16A+8-12A-2A-32A}{A-4}=\boxed{\frac{6A^2-30A+8}{A-4}=x}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2A & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4A & A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & A \end{vmatrix}}=\frac{2A+32A+8A-8-4A^2-16A}{A-4}=\boxed{\frac{-4A^2+26A-8}{A-4}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2A\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 4 & 4A\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & A\end{vmatrix}}=\frac{12A+8+16A-24A-8A-8}{A-4}=\boxed{\frac{-4A}{A-4}=z}$$

La solución es $\boxed{x=\frac{6A^2-30A+8}{A-4};\quad y=\frac{-4A^2+26A-8}{A-4};\quad z=\frac{-4A}{A-4}}$

CASO 2. $A=4$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$ La fila 1ª y 3ª son proporcionales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$.

El rango de A es 2.

Averiguamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 8\\ 2 & 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 4 & 16\end{pmatrix}$.

¿El rango de A/B es 3?

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna →

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 8\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 16\end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 8\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 16\end{vmatrix}=64+8+96-128-48-8=-16\neq 0.$$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B. El **sistema es incompatible**.

Ejercicio B1

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}.

$$M^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^2=MM=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^3=M^2M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^4=M^3M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

...

$$M^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M^{2020}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2020 & 1\end{pmatrix}}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Dada la recta

$r \equiv \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases}$, y el plano $\pi \equiv 3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$,

a) hallar ∝ para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

a) Hallamos el vector director de la recta y el normal del plano.

$$r \equiv \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=z+2 \\ 2x+y=1-4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y=2+z \\ -2x-y=-1+4z \end{cases}$$

$$\boxed{x \quad =1+5z} \Rightarrow 2(1+5z)+y=1-4z \Rightarrow$$

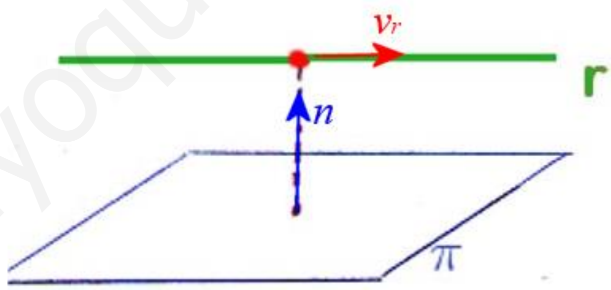
$$\Rightarrow 2+10z+y=1-4z \Rightarrow \boxed{y=-1-14z}$$

$$r \equiv \begin{cases} x=1+5z \\ y=-1-14z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} P_r(1,-1,0) \\ \vec{v_r}=(5,-14,1) \end{cases}}$$

El vector director de la recta es $\vec{v_r}=(5,-14,1)$.

El vector normal del plano $\pi \equiv 3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z=1$ es $\vec{n}=(3,1+\alpha,\alpha)$.

El vector director de la recta $\vec{v_r}=(5,-14,1)$ y el normal del plano $\vec{n}=(3,1+\alpha,\alpha)$ deben ser perpendiculares. Su producto escalar debe ser cero.



$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (5,-14,1)(3,1+\alpha,\alpha)=0 \Rightarrow 15-14-14\alpha+\alpha=0 \Rightarrow -13\alpha=-1 \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{1}{13}}$$

b) Para $\alpha=\frac{1}{13}$ el plano tiene ecuación:

$$\pi \equiv 3x+\left(\frac{1}{13}+1\right)(y+1)+\frac{1}{13}z=1 \Rightarrow \pi \equiv 3x+\left(\frac{14}{13}\right)(y+1)+\frac{1}{13}z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 39x+14y+14+z=13 \Rightarrow \pi \equiv 39x+14y+z+1=0$$

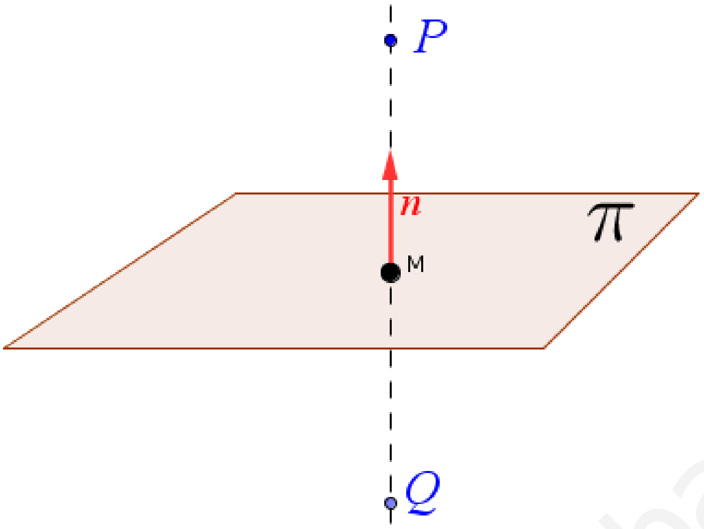
Si el punto $P=(1,1,2)$ pertenece al plano debe cumplir la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} ¿P=(1,1,2)\in\pi? \\ \pi \equiv 39x+14y+z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿39+14+2+1=0?$$

No se cumple la igualdad y el punto no pertenece al plano.

Ejercicio B2

Hallar el punto Q, simétrico de $P=(1,2,3)$ respecto al plano de ecuación $x+y+z=0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.



Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Al ser perpendicular al plano el vector director de la recta es el normal del plano.

$$\pi \equiv x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,3)\in r \\ \vec{v}=\vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r\equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right.$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv x+y+z=0 \\ r\equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3+\lambda \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+2+\lambda+3+\lambda=0 \Rightarrow 6+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-2=-1 \\ y=2-2=0 \\ z=3-2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow M(-1,0,1)$$

Si *Q = (a, b, c)* es el punto simétrico buscado, hacemos que M sea el punto medio del segmento PQ.

$$(-1,0,1)=\frac{(1,2,3)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow (-2,0,2)=(1,2,3)+(a,b,c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a,b,c)=(-2,0,2)-(1,2,3) \Rightarrow \boxed{Q=(a,b,c)=(-3,-2,-1)}$$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x, & x\leq 2 \\ x^2-bx-4, & x>2 \end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Si f es derivable en $x = 2$ también es continua, por lo que se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} ax^2+3x=4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-bx-4=4-2b-4=-2b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+6=-2b \Rightarrow 2a+3=-b$$

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{2\}$ es:

$$f\,'(x)=\begin{cases} 2ax+3, & x<2 \\ 2x-b, & x>2 \end{cases}$$

Como es derivable en $x = 2$ las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2ax+3=4a+3 \\ f\,'(2^+)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-b=4-b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+3=4-b \Rightarrow b=1-4a$$

Juntando las dos condiciones obtenidas tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a+3=-b \\ b=1-4a \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+3=-1+4a \Rightarrow -2a=-4 \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \boxed{b=1-8=-7}$$

Los valores buscados son: $a = 2$ y $b = -7$.

Ejercicio B3
Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^2e^{2x}$.
Encontrar sus extremos.

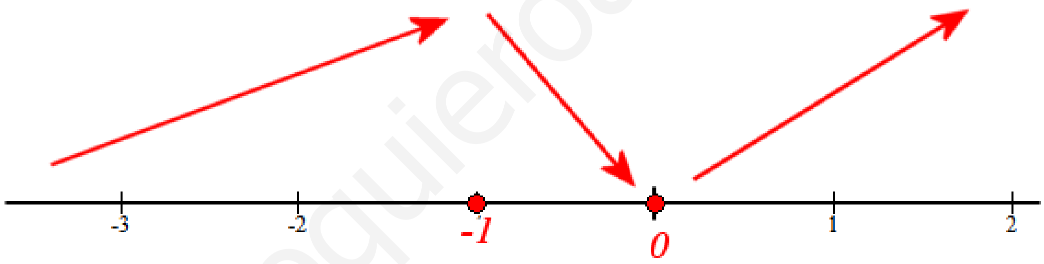
Derivamos e igualamos a cero.

$$f(x)=x^2e^{2x} \Rightarrow f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2xe^{2x}(1+x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2xe^{2x}(1+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 1+x=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

Vemos el cambio de signo antes de 0, entre 0 y 1 y después de 1.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=-4e^{-4}(1-2)=\frac{4}{e^4}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,0)$ tomamos $x=-0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5)=-1\cdot e^{-1}(1-0.5)=\frac{-0.5}{e}<0$. La función decrece en $(-1,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=4e^4(1+2)=12e^4>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-1,0)$.

Tiene un punto máximo en *x = –1* y un mínimo en *x = 0.*
Como $f(-1)=(-1)^2e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ y $f(0)=0^2e^0=0$ el punto máximo tiene coordenadas $\left(-1,\frac{1}{e^2}\right)$ y el punto mínimo tiene coordenadas $(0,0)$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Representar la región finita del plano limitada por la curva $y=3-x^2$ y por la recta $y=2x$. Calcular su área.

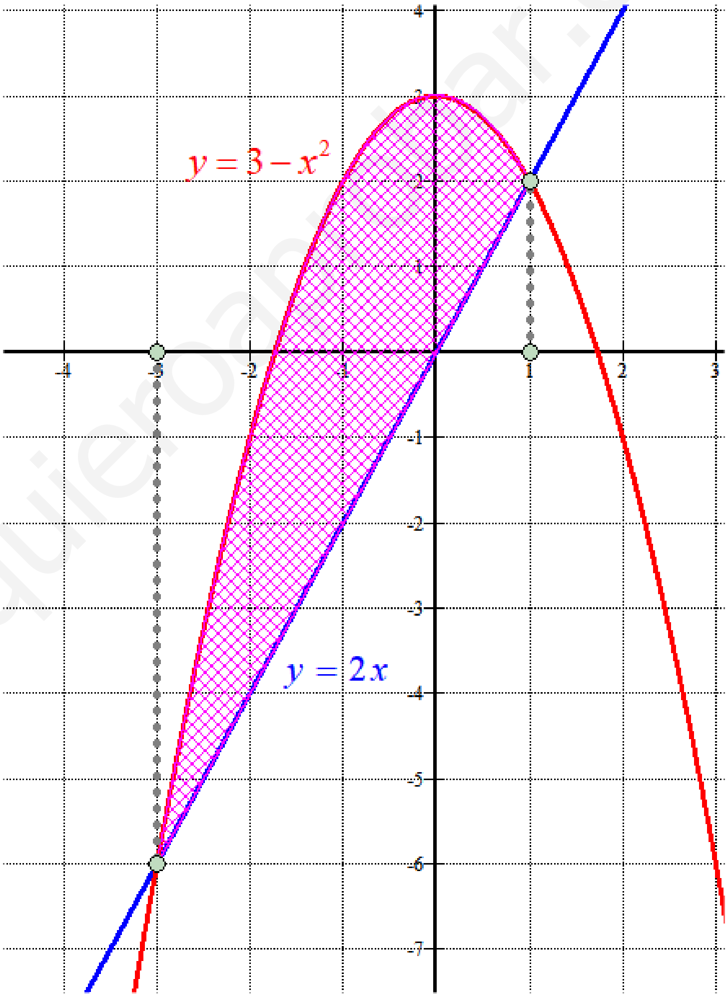
Hallamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=3-x^2 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 3-x^2=2x \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+12}}{2}=\begin{cases} \frac{-2+4}{2}=1=x \\ \frac{-2-4}{2}=-3=x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar la parábola y otra para la recta entre –3 y 1.

x	$y=3-x^2$
-4	-13
-3	-6
-1	2
0	3
1	2
2	-1

x	$y=2x$
-3	-6
0	0
1	2



El área se puede aproximar contando cuadraditos en el dibujo del recinto.
Son aproximadamente entre 10 y 11.

Lo calculamos usando la integral definida entre –3 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-3}^{1} 3-x^2-2x\,dx=\left[3x-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-3}^{1}=\left[3-\frac{1}{3}-1\right]-\left[3(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2\right]=$$

$$=3-\frac{1}{3}-1+9-9+9=11-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{32}{3}=10.66\,u^2}$$

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x\cos(3x)dx$$

Este método de integración nos permite usar la fórmula de derivación de un producto para simplificar el integrando de una integral.

$$\int x\cos(3x)dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = \cos(3x)dx \to v = \int \cos(3x)dx = \frac{1}{3}sen(3x) \end{array}\right\} =$$

$$= x\frac{1}{3}sen(3x) - \int \frac{1}{3}sen(3x)dx = x\frac{1}{3}sen(3x) - \frac{1}{3}\int sen(3x)dx =$$

$$= x\frac{1}{3}sen(3x) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) = \boxed{\frac{xsen(3x)}{3} + \frac{\cos(3x)}{9} + C}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10;\ 0{,}1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:
a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

X = Capacidad de un recipiente.
X = N(10; 0,1)

a) Vamos a calcular la probabilidad de que el recipiente sea bueno.

$$P(9{,}8 \leq X \leq 10{,}1) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{9{,}8-10}{0{,}1} \leq Z \leq \frac{10{,}1-10}{0{,}1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 1) =$$
$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 1) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 2)) =$$
$$= 0.8413 - (1 - 0.9772) = \boxed{0.8185}$$

La probabilidad de no ser defectuoso es de 0.8185.

Por lo que la probabilidad de ser defectuoso es de 1 – 0.8185 = $\boxed{0.1815.}$

b) Si el 18.15 % de los recipientes son defectuosos, de 1500 habrán 1500 · 0.1815 = 272.25 recipientes defectuosos.

Aproximadamente 273 recipientes saldrán defectuosos.

Ejercicio B5
En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:
a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Realizamos una tabla de contingencia para aclarar los datos y obtener los necesarios para responder a las preguntas planteadas.

	Nº alumnos con ojos azules	Nº alumnos sin ojos azules	
Nº alumnos con cabello castaño	**15**		**40**
Nº alumnos sin cabello castaño			
	35		**100**

Completamos la tabla.

	Nº alumnos con ojos azules	Nº alumnos sin ojos azules	
Nº alumnos con cabello castaño	**15**	**25**	**40**
Nº alumnos sin cabello castaño	**20**	**40**	**60**
	35	**65**	**100**

a) Observando la tabla hay 40 alumnos con cabellos castaños y de ellos 15 con ojos azules y aplicando la regla de Laplace:

$$P(\text{Tenga ojos azules / Tiene cabellos castaños}) = \frac{15}{40} = \boxed{\frac{3}{8} = 0.375}$$

b) Observando la tabla hay 35 alumnos con ojos azules y de ellos 20 sin cabello castaño y aplicando la regla de Laplace:

$$P(\text{No tenga cabellos castaños / Tiene ojos azules}) = \frac{20}{35} = \boxed{\frac{4}{7} = 0.571}$$

c) Observando la tabla hay 100 alumnos y de ellos 40 sin ojos azules ni cabello castaño y aplicando la regla de Laplace:

$$P(\textit{No tenga el cabello castaño ni los ojos azules}) = \boxed{\frac{40}{100} = 0.4}$$

d) Observando la tabla hay 100 alumnos y de ellos 40 sin ojos azules ni cabello castaño, por lo que hay 100 – 40 = 60 con ojos azules o cabello castaño y aplicando la regla de Laplace:

$$P(\textit{Tenga ojos azules o cabello castaño}) = \boxed{\frac{60}{100} = 0.6}$$