Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EKAINA — ORDINARIA 2020

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

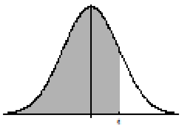
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una Unica pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a)=\begin{cases} ax-y+2z=2 \\ x-2y-z=1 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Ejercicio B1

Sea M (∝) la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha=0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x-y+Az=0$. Sea r la recta dada por $r\equiv\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por (0,2) y tenga un extremo en (1,–1). ¿Tiene f más extremos?

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^2+9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas P = (0, 0). Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x)=x^2-2x+1$ y $g(x)=-x^2+5$, y calcular el área de dicha región.

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas *I* y *J* explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)dx, \qquad J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?
b) Si gana más de 1000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Ejercicio B5

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.
b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.
c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a)=\begin{cases} ax-y+2z=2 \\ x-2y-z=1 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-2a^2+1+4+4+a+2a=-2a^2+3a+9 .$$

Igualamos a cero el determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+3a+9=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+72}}{-4}=\begin{cases} \frac{-3+9}{-4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}=a \\ \frac{-3-9}{-4}=3=a \end{cases}$$

Distinguimos 3 casos diferentes que analizamos a continuación.

CASO 1. $a\neq 3 \ y \ a\neq -\frac{3}{2}$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de A es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos por Cramer.

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}}=\frac{-4a+3+4+12+a+4}{-2a^2+3a+9}=\frac{23-3a}{-2a^2+3a+9}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 3 & a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & a\end{vmatrix}}=\frac{a^2-2+6-2-2a+3a}{-2a^2+3a+9}=\frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & a\end{vmatrix}}=\frac{-6a-1+4+4+3-2a}{-2a^2+3a+9}=\frac{-8a+10}{-2a^2+3a+9}$$

CASO 2. $a=3$

En este caso el determinante es cero y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{pmatrix} 3 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-6+1=-5\neq 0$.

El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª →

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}=3+4-12+4+12+3=14\neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a=-\frac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -3/2\end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} -3/2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -3/2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3+1=4\neq 0$.

El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix} -3/2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª →

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3/2 & 3 \end{vmatrix} = 3+4+6+4+12-\frac{3}{2} \neq 0$

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible.

Ejercicio B1

Sea M (∝) la matriz dada por $M(\alpha)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

a) No tiene inversa cuando su determinante vale cero.

$$|M(\alpha)| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1+\alpha^2-\alpha^2-\alpha^2 = 1-\alpha^2$$

$$|M(\alpha)| = 0 \Rightarrow 1-\alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

La matriz M (∝) no tiene inversa para $\alpha = -1 \; o \; \alpha = 1$

b) Para $\alpha = 0$ existe la inversa pues el determinante de M (∝) es no nulo.

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M(0)| = 1$$

$$(M(0))^{-1} = \frac{Adj\left(M(0)^T\right)}{|M(0)|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2,-3)$ y $\vec{w}=(1,3,5)$

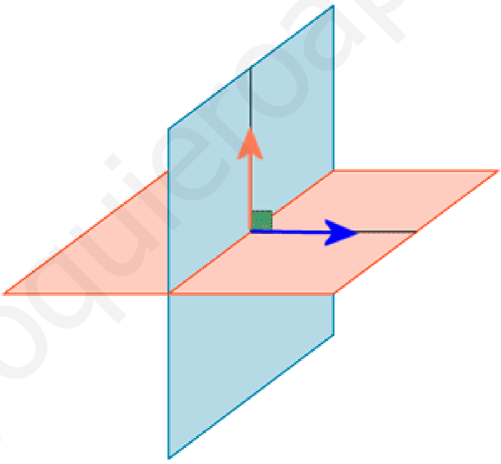
b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

a)

$$\left.\begin{array}{l}(-1,2,3)\in\pi \\ \vec{v}=(-1,-2,-3) \\ \vec{w}=(1,3,5)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$-10x-10-3y+6-3z+9+2z-6+5y-10+9x+9=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv -x+2y-z-2=0}$$

b) Si el plano $Ax-y+5z=8$ es perpendicular a $\pi\equiv -x+2y-z-2=0$ el producto escalar de los vectores normales de ambos planos debe ser cero, pues los vectores son ortogonales.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(-1,2,-1) \\ \vec{n'}=(A,-1,5)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'}=0\Rightarrow(-1,2,-1)(A,-1,5)=0\Rightarrow -A-2-5=0\Rightarrow\boxed{A=-7}$$

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x - y + Az = 0$. Sea *r* la recta dada por $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$

Hallar A para que *r* y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a *r* y que pase por el origen.

Para que *r* y π sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano deben ser ortogonales, por lo que su producto escalar debe ser cero.
Obtenemos un punto haciendo *z = 0* y un vector director de *r* haciendo el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que la definen.

$$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x + 9y = 3 \\ \underline{12x - 8y = -12} \end{cases}$$

$$y = -9 \Rightarrow 4x + 27 = -1 \Rightarrow 4x = -28 \Rightarrow x = -7$$

$$P_r(-7, -9, 0)$$

$$\vec{v_r} = (4, -3, 4) \times (3, -2, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3i + 12j - 8k + 9k - 4j + 8i = 5i + 8j + k = (5, 8, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} r // \pi \\ \vec{v_r} = (5, 8, 1) \\ \vec{n} = (2, -1, A) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (5, 8, 1)(2, -1, A) = 0 \Rightarrow 10 - 8 + A = 0 \Rightarrow \boxed{A = -2}$$

Falta ver que la recta no está contenida en el plano. Para ello basta con ver si el punto $P_r(-7, -9, 0)$ cumple la ecuación del plano.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y - 2z = 0 \\ P_r(-7, -9, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow ¿2(-7) - (-9) - 2(0) = 0? \Rightarrow ¿-14 + 9 = 0?$$

El punto no pertenece al plano y recta y plano son paralelos.

Obtenemos el plano perpendicular a la recta r que pasa por O(0, 0, 0).
Al ser perpendicular a la recta el plano tiene a $\vec{v_r} = (5, 8, 1)$ como vector normal.

$$\left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi' \\ \vec{n} = \vec{v_r} = (5, 8, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} O(0,0,0) \in \pi' \\ \pi' \equiv 5x + 8y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

El plano pedido tiene ecuación $\boxed{\pi' \equiv 5x + 8y + z = 0}$

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por (0,2) y tenga un extremo en (1,–1). ¿Tiene *f* más extremos?

Si pasa por (0, 2) se cumple que $f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = \boxed{c = 2}$

Si tiene un extremo en (1,–1) quiere decir que pasa por (1,–1) y que la derivada se anula en $x = 1$.

$$f(1) = -1 \Rightarrow f(1) = a + b + 2 = -1 \Rightarrow a + b = -3.$$

Al ser un extremo en $x = 1$ la derivada se anula $f'(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

Juntamos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 3a + 2b = 0 \\ a + b = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a + 2b = 0 \\ a = -b - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3b - 9 + 2b = 0 \Rightarrow -b - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -9} \Rightarrow \boxed{a = 9 - 3 = 6}$$

La función queda $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de otros extremos.

$$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 18x^2 - 18x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 18x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 18x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

El extremo en $x = 1$ es el que nos proporciona el ejercicio. Veamos si $x = 0$ es extremo.

$$f'(x) = 18x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 36x - 18$$

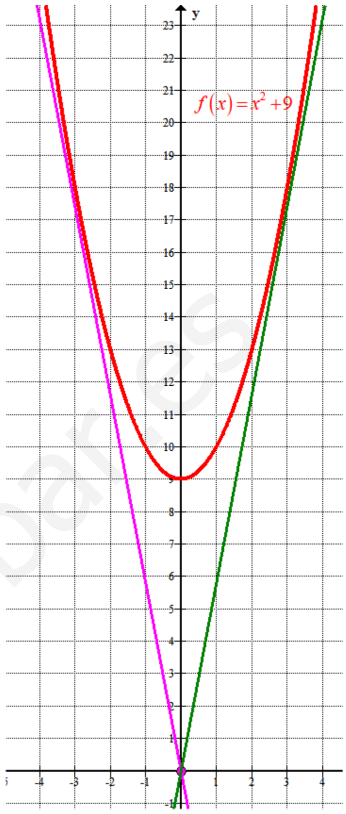
$$f''(0) = -18 < 0$$

En $x = 0$ hay un máximo relativo

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^2+9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas P = (0, 0). Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

Dibujamos la gráfica de la parábola y el punto para aclarar la situación planteada.



$f(x)=x^2+9$

x	$y=x^2+9$
-2	13
-1	10
0	9
1	10
2	13

La derivada de la función es $f'(x)=2x$

La tangente a $f(x)$ en $x = a$ tiene ecuación:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=a^2+9 \\ f'(a)=2a \end{array}\right\} \Rightarrow y-(a^2+9)=2a(x-a)$$

La tangente debe pasar por (0, 0) por lo que debe cumplirse:

$$0-(a^2+9)=2a(0-a) \Rightarrow -a^2-9=-2a^2 \Rightarrow a^2-9=0 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=3 \end{cases}$$

Hay dos tangentes a $f(x)=x^2+9$ que pasan por el punto P(0, 0):

$$\left.\begin{array}{l} y-(a^2+9)=2a(x-a) \\ a=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-18=-6(x+3) \Rightarrow \boxed{y=-6x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-(a^2+9)=2a(x-a) \\ a=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y-18=6(x-3) \Rightarrow \boxed{y=6x}$$

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Dibujar la región encerrada por $f(x)=x^2-2x+1$ y $g(x)=-x^2+5$, y calcular el área de dicha región.

Localicemos los puntos de corte de estas dos parábolas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-2x+1=-x^2+5\Rightarrow 2x^2-2x-4=0\Rightarrow x^2-x-2=0$$

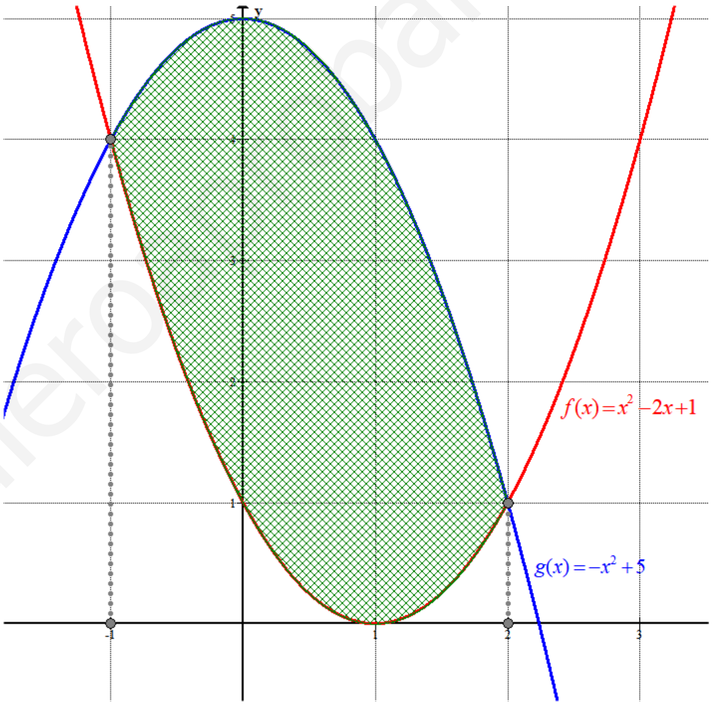
$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Se cortan en $x=-1$ y en $x=2$.

Damos una tabla de valores y dibujamos.

x	$f(x)=x^2-2x+1$
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1

x	$g(x)=-x^2+5$
-2	1
-1	4
0	5
1	4
2	1



El recinto cubre aproximadamente 9 cuadraditos.
La calculamos con precisión haciendo uso de la integral.

El área es la integral definida entre –1 y 2 de *g(x) – f(x).*

$$\int_{-1}^{2}-x^2+5-\left(x^2-2x+1\right)dx=\int_{-1}^{2}-2x^2+2x+4dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[-2\frac{2^3}{3}+2^2+8\right]-\left[-2\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+4(-1)\right]=-\frac{16}{3}+4+8-\frac{2}{3}-1+4=\boxed{9\,u^2}$$

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I=\int x\cos(2x)dx, \qquad J=\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

$$I=\int x\cos(2x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=\cos(2x)dx\to v=\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}sen(2x)\end{array}\right\}=$$

$$=x\frac{1}{2}sen(2x)-\int\frac{1}{2}sen(2x)dx=$$

$$=\frac{xsen(2x)}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)=$$

$$=\boxed{\frac{xsen(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+C}$$

$$J=\int\frac{dx}{x^2+2x-3}=$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2+2x-3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+12}}{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{-2+4}{2}=1=x\\ \frac{-2-4}{2}=-3=x\end{array}\right.\Rightarrow x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

$$1=A(x+3)+B(x-1)$$

$$x=1\to 1=4A\to A=\frac{1}{4}$$

$$x=-3\to 1=-4B\to B=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+3}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+3}dx=\boxed{\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

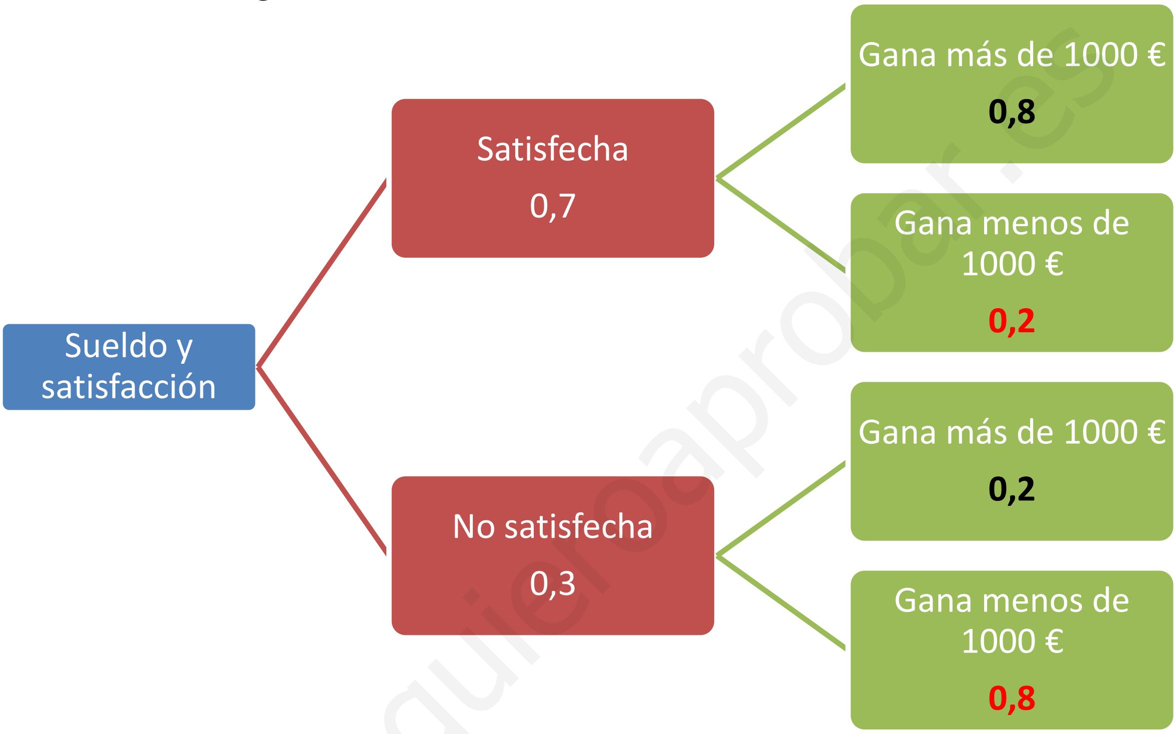
En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?

b) Si gana más de 1000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Construimos un diagrama de árbol.



a) Mirando el diagrama lo calculamos multiplicando y sumando.

$$P(\text{Gane más de } 1000\text{ €}) = 0,7\cdot 0,8 + 0,3\cdot 0,2 = 0,56 + 0,06 = \boxed{0,62}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Esté satisfecha con su contrato / Gana más de } 1000\text{ €}) =$$

$$= \frac{P(\text{Esté satisfecha con su contrato } \cap \text{ Gana más de } 1000\text{ €})}{P(\text{Gana más de } 1000\text{ €})} = \frac{0,7\cdot 0,8}{0,62} = \boxed{\frac{28}{31} = 0,903}$$

c) $P(\text{Gane menos de } 1000\text{ € y esté satisfecha con su contrato}) = 0,7\cdot 0,2 = \boxed{0,14}$

Ejercicio B5
En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:
a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.
b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.
c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

a) Se trata de 30 repeticiones de un experimento "Ver si el aparcamiento está ocupado" que solo tiene dos posibilidades: Ocupado o vacío. Las repeticiones son independientes entre sí y la probabilidad de estar ocupado es siempre 0,4.
Este modelo de probabilidad es una distribución binomial con parámetros n = 30 y p = 0.4.
X = Número de aparcamientos ocupados de las 30 plazas.
X= B(30, 0.4)

b)

$$P(\text{Haya 8 plazas ocupadas}) = P(X=8) = \binom{30}{8} 0.4^8 \cdot 0.6^{22} =$$

$$= \frac{\cancel{30} \cdot 29 \cdot \cancel{28} \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \cancel{24} \cdot 23}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2} 0.4^8 \cdot 0.6^{22} = \boxed{0.05}$$

c) Para calcular esta probabilidad aproximamos a una normal.
X= B(30, 0.4)
Se aproxima con una normal de media $\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0.4 = 12$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2.68$.

X= B(30, 0.4) se aproxima con una N(12, 2.68).

$$P(10 < X < 20) = \{\text{Ajuste de continuidad}\} = P(9.5 < X < 20.5) =$$
$$= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{9.5-12}{2.68} < Z < \frac{20.5-12}{2.68}\right) =$$
$$= P(-0.9328 < Z < 3.1716) =$$
$$= P(Z < 3{,}1716) - P(Z < -0{,}9328) =$$
$$= P(Z < 3{,}1716) - P(Z > 0{,}9328) =$$
$$= P(Z < 3{,}1716) - [1 - P(Z < 0{,}9328)] =$$
$$= 0{,}9992 - [1 - 0{,}8238] = \boxed{0{,}823}$$