# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

# SEPTIEMBRE – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II                Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = ax^2$, donde $a$ es un número real positivo.

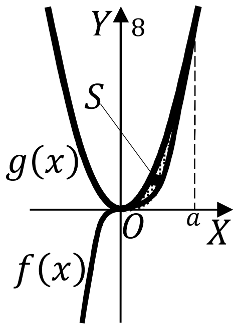
$a$) Encuentra, en función del parámetro $a$, los puntos de corte entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ y haz un esbozo de la región limitada por las dos gráficas.

$b$) Calcule el valor de $a$ para que el área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{27}{4}\ u^2$.

----------

$a$)

Los puntos de intersección de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.




$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 = ax^2;\ \ x^2(x-a) = 0;$$

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = a > 0.$$

$\underline{Los\ puntos\ de\ corte\ son\ O(0,0)\ y\ P(a,a^3), con\ a > 0}.$

La función $f(x) = x^3$ es monótona creciente en R y simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$. La función $g(x) = ax^2$, con $a > 0$, es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de $x^2$, cuyo vértice es el origen de coordenadas.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

$b$)

En el intervalo $(0, a)$ las ordenadas de la función $g(x)$ son mayores que las correspondientes coordenadas de $f(x)$, por lo cual, la superficie que delimitan es:

$$S = \int_0^a [g(x) - f(x)] \cdot dx = \frac{27}{4};\ \int_0^a (ax^2 - x^3) \cdot dx = \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{27}{4};$$

$$\left(\frac{a\cdot a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\right)-0=\frac{27}{4};\ \ \frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}=\frac{27}{4};\ \ 4a^4-3a^4=81;\ \ a^4=81\Rightarrow \underline{a=3}.$$

**********

2º) Un avión se desplaza desde el punto $A(0, 3, 1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta $r$ paralela al vector $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

$a$) Calcule las coordenadas del punto B de contacto del avión con el plano y la distancia recorrida.

$b$) Calcule la ecuación del plano perpendicular a la plataforma y que contiene a la recta $r$ seguida por el avión desde el punto A.

----------

La recta $r$ dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto B es la intersección del plano $\pi$ y la recta $r$:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - 2y + z = 1 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda - 2(3 - \lambda) + 1 = 1;\;\; \lambda - 6 + 2\lambda = 0;\;\; 3\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{B(2, 1, 1)}.$$

La distancia recorrida es la siguiente:

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

$$\underline{La\ distancia\ recorrida\ es\ d = 2\sqrt{2}\ unidades}.$$

$b$)

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ es $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Un vector director de la recta $r$ es $\overrightarrow{v_r} = \vec{v} = (1, -1, 0)$.

El plano $\beta$ pedido tiene la siguiente ecuación general:

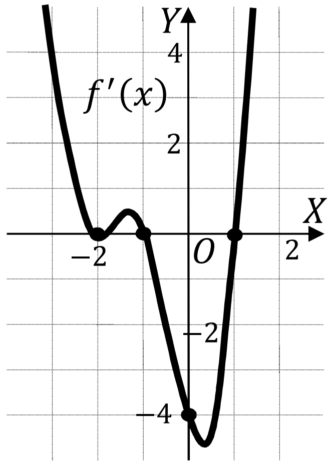
$$\beta(A;\ \overrightarrow{v_r}, \vec{n}\,) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-x - 2(z-1) + (z-1) - (y-3) = 0;\;\; -x - (z-1) - (y-3) = 0;$$

$$-x - z + 1 - y + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x + y + z - 4 = 0}.$$

**********

3º) Sea $f(x)$ una función derivable la gráfica de la cual pasa por el punto $P(0, 1)$. La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura adjunta.




$a$) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$.

$b$) Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos.

----------

$a$)

Para $x = 0$ es $f(0) = 1$, por lo cual el punto de tangencia es $P(0, 1)$.

La pendiente de la tangente de la grafica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto. De la observación de la figura se deduce que $m = -4$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 1)$ con $m = -4$ es:

$y - 1 = -4(x - 0) = -4x$.

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 4x + y - 1 = 0}.$$

$b$)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. De la observación de la figura, la función tiene posibles máximos y mínimos relativos para $x_1 = -2, x_2 = -1\ y\ x_3 = 1$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo. Teniendo en cuenta que una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente, y que la derivada de la función $f'(x)$ es $f''(x)$ y que:

$$\underline{x = -2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo: Punto\ de\ Inflexión}.$$

$$\underline{x = -1 \Rightarrow f'(x) \Rightarrow Decreciente \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = -1}.$$

$$\underline{x = 1 \Rightarrow f'(x) \Rightarrow Creciente \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 1}.$$

**********

4º) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde $a$ es un parámetro real.

$a$) Estudie el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro $a$.

$b$) Compruebe que para $a=4$ la matriz A es invertible que se cumple que $A^{-1}=A^2$.

----------

$a$)

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-a(a-7)-3+a-12=0;$$

$-a^2+7a+a-15=0;\ \ a^2-8a+15=0;\ \ a=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm 2}{2}=$

$=4\pm 1\Rightarrow a_1=3, a_2=5.$

$$\underline{Para\ a\neq 3\ y\ a\neq 5\Rightarrow Rang\ A=3.}$$

$$\underline{Para\ a=3\ y\ a=5\Rightarrow Rang\ A=2.}$$

$b$)

$$\underline{Del\ apartado\ a)\ se\ deduce\ que\ para\ a=4\ la\ matriz\ A\ es\ invertible.}$$

Para $a=4\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $\qquad |A|=-4^2+8\cdot 4-15=1.$

$$A^t=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

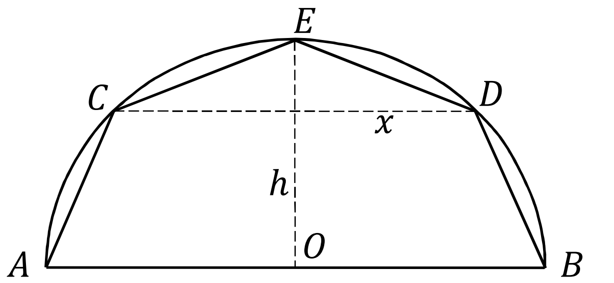
$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^{-1} = A^2}.$$

**********

5º) Una empresa esta trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscrita en una semicircunferencia de radio 1, trazando una cuerda CD paralela al diámetro AB e incorporando el punto E en punto medio del arco CD. De esta forma queda trazado el pentágono ACEDB, tal como se muestra en la figura adjunta.

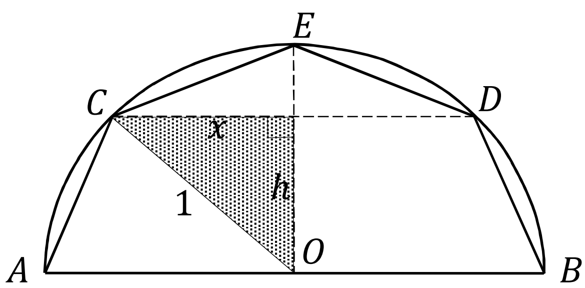



$a$) Expresa en función de $x$ y $h$ el área del pentágono ACEDB.

$b$) ¿Cuál ha de ser la distancia (indicada en la figura por $h$) a que se ha de situar la cuerda CD de AB para que el área del pentágono ACEDB sea máxima?

----------

$a$)




Del triángulo rectángulo sombreado de la figura se deduce (Pitágoras) que:

$$x^2 + h^2 = 1 \Rightarrow h = \sqrt{1 - x^2}.$$

La superficie del pentágono ACEDB es la suma del trapecio ACDB más el área del triángulo CDE:

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h + \frac{\overline{CD} \cdot (1 - h)}{2} \Rightarrow S(x) = \frac{2 + 2x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + \frac{2x \cdot \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)}{2} =$$

$$= (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) =$$

$$= x\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} + x - x\sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \underline{S(x) = x + \sqrt{1 - x^2}}.$$

$b$)

Las condiciones necesarias para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{1 - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0; \;\; 1 = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \;\; \sqrt{1 - x^2} = x; \;\; 1 - x^2 = x^2;$$

$$2x^2 = 1; \;\; x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$S''(x) = 0 - \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = -\frac{1-x^2-x^2}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^2-1}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

$$S''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1-2x^2}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$$

Como la segunda derivada no es ni positiva ni negativa, habría que utilizar el procedimiento de las derivadas sucesivas, hasta encontrar una que no se anulara para el valor que anula la primera. Este procedimiento no está contenido en la programación correspondiente a 2º de bachillerato, por lo cual, se hace el estudio topológico del valor que anula la primera derivada: $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$.

Para $x = 0{,}7 < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S'(0{,}7) = 1 - \frac{0{,}7}{\sqrt{1-0{,}49}} = 1 - \frac{0{,}7}{\sqrt{0{,}51}} = 1 - 0{,}98 > 0.$

Para $x = 0{,}8 > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S'(0{,}8) = 1 - \frac{0{,}8}{\sqrt{1-0{,}64}} = 1 - \frac{0{,}8}{\sqrt{0{,}36}} = 1 - \frac{4}{3} < 0.$

Resulta que en entorno de $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la función $S'(x)$ es decreciente, por lo cual, su derivada, o sea $S''(x)$ es negativa y, en consecuencia, queda probado que para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la función $f(x)$ tiene un máximo relativo para $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$h = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = x.$$

$\underline{\textit{La superficie del pentágono es máxima para } x = h = \frac{\sqrt{2}}{2} \textit{ unidades.}}$

**********

6º) Sean las rectas $r \equiv \frac{x-3}{2} = y = z - 1$ y $s \equiv (\mu, -\mu, \mu)$.

$a$) Determine la posición relativa de las rectas.

$b$) Calcule la distancia entre las rectas $r$ $y$ $s$.

----------

$a$)

La ecuación de la recta $s$ expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector director de la recta $r$ son $A(3, 0, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta $s$ son $O(0, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r$ y $s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $O \in s$ y extremo el punto $A \in r$: $\vec{w} = \overrightarrow{OA} = (3, 0, 1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas $r$ y $s$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 + 3 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \ \Rightarrow \ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

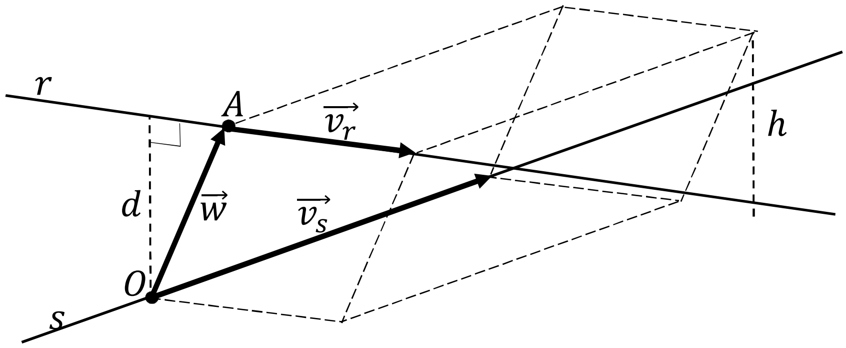
$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

$b$)

Para calcular la distancia entre las rectas $r$ y $s$ vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\vec{w} = (3, 0, 1)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa en la figura adjunta.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.




Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right) = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot h = \left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| \cdot d \Rightarrow d = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}.$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \left(\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right|} = \frac{|-3|}{|i+j-2k-k+i-2j|} = \frac{|-3|}{|2i-j-3k|} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\underline{d(r,s) = \frac{3\sqrt{14}}{14}\,u.}$$

**********