PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Calcula *a > 0* sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f\left(x\right)=xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x=a$ vale $\dfrac{1}{9}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m+2\\ 0 & 1 & m+1\\ m & 0 & 5\end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de *A* según los valores de *m*. **(1.5 puntos)**
b) Para $m=2$, calcula la inversa de *2020A*. **(1 punto)**

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Siendo $a\neq 0$, considera las rectas

$$r\equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \quad y \quad s\equiv\frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de *a*. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de *r* y *s* y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2019-2020

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{senx}{2-\cos x}$.

a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ $\quad para\ x\neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. **(2 puntos)**

b) Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (3, 5). **(0.5 puntos)**

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$ $\quad y \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

a) Discute el sistema dado por $AX=B$, según los valores de *a*. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=0$, resuelve el sistema dado por $AX=B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y+z=4$. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x+y=0\\y-3z+2=0\end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y es perpendicular a *r*. **(1.25 puntos)**

b) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y contiene a *r*. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$.

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1.25 puntos)**

a) El dominio de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{1+2-3}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2-2x-3=0 \\ \begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & -3 \\ -1 & & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -3 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow x^2-2x-3=(x+1)(x-3) \\ x^2-1=(x+1)(x-1) \end{array}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-3}{x-1}=\frac{-4}{-2}=2$$

No hay asíntota en $x=-1$

¿ $x=1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{1-2-3}{0}=\frac{-4}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

La asíntota horizontal es $y=1$

Asíntota oblicua. No hay pues tiene asíntota horizontal.

b)

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{(2x-2)\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{\cancel{2x^3}-2x-2x^2+2-\cancel{2x^3}+4x^2+6x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^2+4x+2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2\left(x^2+2x+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2\left(x+1\right)^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Esta función derivada es siempre positiva, por lo que la función siempre crece.

<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)
Calcula *a > 0* sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

Buscamos puntos de corte con los ejes.

$$f(x) = 0 \Rightarrow xe^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

El área es el valor de la integral definida entre 0 y *a* de $f(x) = xe^{3x}$, pues a > 0.

Antes hallamos la integral indefinida.

$$\int xe^{3x}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\} = x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx =$$

$$= \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} = \frac{e^{3x}(3x-1)}{9}$$

A partir de esta primitiva el área es:

$$Área = \int_0^a xe^{3x}dx = \left[\frac{e^{3x}(3x-1)}{9}\right]_0^a = \left[\frac{e^{3a}(3a-1)}{9}\right] - \left[\frac{e^{0}(0-1)}{9}\right] = \frac{e^{3a}(3a-1)}{9} + \frac{1}{9}$$

Como debe ser $\frac{1}{9}$ entonces:

$$\frac{e^{3a}(3a-1)}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{e^{3a}(3a-1)}{9} = 0 \Rightarrow e^{3a}(3a-1) = 0 \Rightarrow 3a-1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$$

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m+2\\ 0 & 1 & m+1\\ m & 0 & 5\end{pmatrix}$.

a) Estudia el rango de *A* según los valores de *m*. **(1.5 puntos)**
b) Para $m=2$, calcula la inversa de *2020A*. **(1 punto)**

a) El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & m+2\\ 0 & 1 & m+1\\ m & 0 & 5\end{vmatrix}=5-m^2-m-m^2-2m=-2m^2-3m+5$$

Lo igualo a cero.

$$|A|=0\Rightarrow -2m^2-3m+5=0\Rightarrow m=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2+40}}{-4}=\frac{3\pm 7}{-4}=\begin{cases}\frac{3+7}{-4}=-2,5=m\\ \frac{3-7}{-4}=1=m\end{cases}$$

Establecemos tres casos diferentes.

CASO 1. $m\neq 1\ y\ m\neq -2,5$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $m=1$

El determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2?

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$ → Extraemos un menor de orden 2 quitando la 1ª fila y la 1ª columna → $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}=5\neq 0$.

El rango de A es 2.

CASO 3. $m=-2,5$

El determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2?

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -0,5\\ 0 & 1 & -1,5\\ -2,5 & 0 & 5\end{pmatrix}$ → Extraemos el menor de orden 2 quitando la 3ª fila y la 3ª columna → $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$

El rango de A es 2.

b)

Para $m=2$ tenemos que la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5-6-8 = -9 \neq 0$$

Por lo que existe la inversa de A y también de 20220A.

Calculamos la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}}{-9} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1} = \frac{1}{2020}\left(-\frac{1}{9}\right)\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{18180}\begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(2020A)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3636} & -\frac{1}{3636} & \frac{7}{18180} \\ -\frac{1}{3030} & \frac{1}{6060} & \frac{1}{6060} \\ \frac{1}{9090} & \frac{1}{9090} & -\frac{1}{18180} \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 4 **(2.5 puntos)**
Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \quad y \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

a) El vector director de *r* es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,\text{a})$ y el de *s* es $\overrightarrow{v_s}=(-\text{a},-1,2)$.

¿Pueden ser las rectas paralelas o coincidentes?
Deben ser las coordenadas de los vectores directores proporcionales.

$$\frac{1}{-a}=\frac{1}{-1}=\frac{a}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{-a}=\frac{1}{-1} \Rightarrow -1=-a \Rightarrow a=1 \\ \frac{1}{-1}=\frac{a}{2} \Rightarrow 2=-a \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

No pueden ser paralelas, pues no hay ningún valor de **a** que lo haga posible.

Las rectas se cruzan o se cortan en un punto.

Un punto de la recta *r* es $P_r(1,2,1)$ y uno de *s* es $P_s(3,3,-1)$
El vector que une esos dos puntos tiene coordenadas $\overrightarrow{P_rP_s}=(3,3,-1)-(1,2,1)=(2,1,-2)$

Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{v_r}$; $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$.

$$\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\cancel{2}+4-a^2+\cancel{2a}-\cancel{2a}-\cancel{2}=-a^2+4$$

Veamos cuando se anula.

$$\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=0 \Rightarrow -a^2+4=0 \Rightarrow -a^2=-4 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\sqrt{4}=\pm 2$$

Si $a=\pm 2$ el producto mixto es cero y las rectas se cortan en un punto.
Si $a \neq \pm 2$ el producto mixto es no nulo y las rectas se cruzan (tienen distinta dirección y están en planos paralelos, no son coplanarias.

b) Para $a=2$ las rectas se cortan. Averiguamos el punto de corte.
Ponemos las rectas en ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \\ P_r(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(-2,-1,2) \\ P_s(3,3,-1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=3-2\mu \\ y=3-\mu \\ z=-1+2\mu \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos rectas.

$$\begin{cases} 3-2\mu=1+\lambda \\ 3-\mu=2+\lambda \\ -1+2\mu=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2\mu=\lambda \\ 1-\mu=\lambda \\ -2+2\mu=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2\mu=1-\mu \\ -2+2\mu=2-2\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=\mu \\ 4\mu = 4 \end{cases} \Rightarrow 1=\mu$$

Sustituyendo en la recta *s* obtenemos el punto $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \Rightarrow P_s(1,2,1) \\ z=1 \end{cases}$

Tenemos que hallar la recta que pasa por $P_s(1,2,1)$ y es perpendicular a las dos rectas. Por lo que tendrá como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas: $\overrightarrow{v_r}=(1,1,2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(-2,-1,2)$.

$$\vec{v}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2i-4j-k+2k-2j+2i=4i-6j+k=(4,-6,1)$$

La recta pedida es $t \equiv \begin{cases} x=1+4\lambda \\ y=2-6\lambda, \quad con\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 5</u> (2.5 puntos)

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{senx}{2-\cos x}$.

a) Halla los extremos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**

b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

a)

$$f(x)=\frac{senx}{2-\cos x}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{\cos x\left(2-\cos x\right)-senx\left(senx\right)}{\left(2-\cos x\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cos x-\cos^2 x-sen^2x}{\left(2-\cos x\right)^2}=\frac{2\cos x-\left(\cos^2 x+sen^2x\right)}{\left(2-\cos x\right)^2}=\frac{2\cos x-1}{\left(2-\cos x\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{2\cos x-1}{\left(2-\cos x\right)^2}=0\Rightarrow 2\cos x-1=0\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}\\ x=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}\end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del dominio de definición $[0,2\pi]$ y en los puntos críticos en busca de los extremos absolutos.

$$x=0\ \rightarrow\ f(0)=\frac{sen0}{2-\cos 0}=0$$

$$x=\frac{\pi}{3}\rightarrow f(0)=\frac{sen\dfrac{\pi}{3}}{2-\cos\dfrac{\pi}{3}}=0.57$$

$$x=\frac{5\pi}{3}\ \rightarrow f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{sen\dfrac{5\pi}{3}}{2-\cos\dfrac{5\pi}{3}}=-0,057$$

$$x=2\pi\ \rightarrow f(2\pi)=\frac{sen2\pi}{2-\cos 2\pi}=0$$

La función presenta un máximo en el punto $\left(\dfrac{\pi}{3},0.57\right)$ y un mínimo en $\left(\dfrac{5\pi}{3},-0.57\right)$

En $x=\dfrac{\pi}{3}$ $\rightarrow$ $f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{sen\dfrac{\pi}{3}}{2-\cos\dfrac{\pi}{3}}=0.57$ y $f\,'(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{2\cos\dfrac{\pi}{3}-1}{\left(2-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2}=\dfrac{1-1}{\left(2-0.5\right)^2}=0$

La recta tangente tiene ecuación $y-0.57=0\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\boxed{y=0.57}$

La recta normal tiene pendiente $-\dfrac{1}{f\,'(\frac{\pi}{3})}=-\dfrac{1}{0}$. Es una recta vertical, pues la tangente es horizontal. Es $\boxed{x=\dfrac{\pi}{3}}$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Sea f la función dada por $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ *para* $x\neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)dx$. **(2 puntos)**

b) Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (3, 5). **(0.5 puntos)**

a)

$$\int f(x)dx=\int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}dx=$$

$$\frac{3x^2+4}{(x-2)^2}=\frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}$$

$$\begin{array}{cccc} 3x^2 & & +4 & \big| x^2-4x+4 \\ -3x^2 & +12x & -12 & 3 \\ & 12x & -8 & \end{array}$$

$$\frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}=3+\frac{12x-8}{(x-2)^2}$$

Desarrollamos en fracciones simples

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\frac{12x-8}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\Rightarrow 12x-8=A(x-2)+B$$

$$x=2\to 24-8=0+B\to B=16$$

$$x=0\to 4=-2A+B\to 4=-2A+28\to -24=-2A\to A=12$$

$$\frac{12x+4}{(x-2)^2}=\frac{12}{x-2}+\frac{16}{(x-2)^2}$$

$$=\int 3+\frac{12}{x-2}+\frac{16}{(x-2)^2}dx=3x+12\ln|x-2|+16\int (x-2)^{-2}dx=$$

$$=3x+12\ln|x-2|+16\left(\frac{1}{-1}\right)(x-2)^{-1}=\boxed{3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+C}$$

b) Si $F(x)=3x+12\ln|x-2|-\dfrac{16}{x-2}+C$ y además $F(3)=5$

$$F(3)=9+12\ln|3-2|-\frac{16}{3-2}+C=5\Rightarrow 9+0-16+C=5\Rightarrow C=12$$

La primitiva buscada es $\boxed{F(x)=3x+12\ln|x-2|-\dfrac{16}{x-2}+12}$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

a) Discute el sistema dado por $AX=B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**

b) Para $a=0$, resuelve el sistema dado por $AX=B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y+z=4$. **(1.25 puntos)**

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{vmatrix}=4+1-4-1=0$$

El rango de A no es 3.

Tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ con determinante

$\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq 0$. El rango de A es 2

Veamos el rango de $A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&0&1&2a\\4&1&4&3a\end{pmatrix}$

Consideramos el menor que resulta de quitar la columna 1ª, pues la columna 1ª y la 3ª son iguales → $\begin{pmatrix}1&1&a\\0&1&2a\\1&4&3a\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}1&1&a\\0&1&2a\\1&4&3a\end{vmatrix}=3a+2a-a-8a=-4a$

Se plantean dos situaciones posibles.

Si $a=0$ este determinante es nulo y el rango de A/B es 2.
Rango de A = rango de A/B = 2 < 3 = número de incógnitas.
El sistema es compatible indeterminado.

Si $a\neq 0$ el determinante es no nulo y el rango de A/B es 3.
Rango de A = 2 ≠ 3 = rango de A/B
El sistema es incompatible.

b) Para $a=0$ el sistema tiene infinitas soluciones.

$$AX=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\4&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\x+z=0\\4x+y+4z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+z=0\\\boxed{x=-z}\\4x+y+4z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-z+y+z=0\\-4z+y+4z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=0\\y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{y=0}$$

La solución es $\boxed{x=-t;\quad y=0;\quad z=t}$

Para que sea $y+z=4$ como $y=0$ debe ser $z=4$ y entonces $x=-4$.

La solución es $x=-4;\ y=0;\ z=4$.

<u>EJERCICIO 8</u> (2.5 puntos)

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=3z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-3z \\ y=-2+3z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-3t \\ y=-2+3t \\ z=0+t \end{cases}$$

La recta pasa por $P(2,-2,0)$ y tiene vector director $\overrightarrow{v_r}=(-3,3,1)$

El plano perpendicular a la recta tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,-2,)\in\pi \\ \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(-3,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(1,-2,0)\in\pi \\ \pi\equiv -3x+3y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -3-6+0+D=0 \Rightarrow D=9$$

$$\boxed{\pi \equiv -3x+3y+z+9=0}$$

b) El plano que pasa por A y contiene a r tiene como vectores directores el vector director de r y el vector $\overrightarrow{AP}=(2,-2,0)-(1,-2,0)=(1,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AP}=(1,0,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(-3,3,1) \\ A(1,-2,0)\in\pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3z-y-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -y+3z-2=0}$$