

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2
- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Septiembre, Ejercicio 2
- Septiembre, Ejercicio 6

(2'5 puntos) Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \cdot e^{3x} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot e^{3x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Calculamos el área haciendo la integral por partes

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$A = \int_0^a x \cdot e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} x \cdot e^{3x} \right]_0^a - \frac{1}{3} \int_0^a e^{3x} dx = \left[\frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} \right]_0^a = \left(\frac{1}{3} a \cdot e^{3a} - \frac{1}{9} e^{3a} \right) - \left(-\frac{1}{9} \right) = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} a \cdot e^{3a} - \frac{1}{9} e^{3a} = 0 \Rightarrow e^{3a} \left(\frac{1}{3} a - \frac{1}{9} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} a - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Sea f la función dada por: $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$

a) (2 puntos) Calcula $\int f(x) dx$

b) (0'5 puntos) Calcula la primitiva de f que pasa por el punto (3,5)

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

La función $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x-2)^2} = \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} dx = \int 3 dx + \int \frac{12x - 8}{x^2 - 4x + 4} dx = 3x + \int \frac{12x - 8}{x^2 - 4x + 4} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = 2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{12x - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} = \frac{A(x - 2) + B}{(x - 2)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo, luego:

$$x = 2 \Rightarrow 16 = B$$

$$x = 0 \Rightarrow -8 = -2A + B \Rightarrow -8 = -2A + 16 \Rightarrow A = 12$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} dx &= 3x + \int \frac{12x - 8}{x^2 - 4x + 4} dx = 3x + \int \frac{12}{x - 2} dx + \int \frac{16}{(x - 2)^2} dx = \\ &= 3x + 12 \ln |x - 2| + 16 \int (x - 2)^{-2} dx = 3x + 12 \ln |x - 2| + 16 \frac{(x - 2)^{-1}}{-1} + C = \\ &= 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + C \end{aligned}$$

b) Calculamos la primitiva que pasa por (3,5)

$$F(x) = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + C \Rightarrow F(3) = 5 \Rightarrow 9 + 12 \ln |1| - 16 + C = 5 \Rightarrow C = 12$$

Luego: $F(x) = 3x + 12 \ln |x - 2| - \frac{16}{x - 2} + 12$

(2'5 puntos) Sea f la función definida por $f(x) = \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 - x}$ para $x \neq 0$, $x \neq 1$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(2, 3 \ln 2)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 - x} dx = \int (-x - 1) dx + \int \frac{x - 3}{x^2 - x} dx = -\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{x - 3}{x^2 - x} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = 1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x - 3}{x^2 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + Bx}{x \cdot (x - 1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 0 \Rightarrow -3 = -A \Rightarrow A = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow -2 = B \Rightarrow B = -2$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{-x^3 + 2x - 3}{x^2 - x} dx = -\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{x - 3}{x^2 - x} dx = -\frac{x^2}{2} - x + \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{2}{x - 1} dx = \\ &= -\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x| - 2 \ln|x - 1| + C \end{aligned}$$

Calculamos la función que pasa por el punto $(2, 3 \ln 2)$

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x| - 2 \ln|x - 1| + C \Rightarrow 3 \ln 2 = -2 - 2 + 3 \ln 2 - 2 \ln 1 + C \Rightarrow C = 4$$

Luego, la función que nos piden es: $F(x) = -\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x| - 2 \ln|x - 1| + 4$

(2'5 puntos) Calcula $\int \ln(x^2 + 2x + 2) dx$ donde \ln denota logaritmo neperiano.

(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = x + 1$).

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$$

$$dt = dx$$

Sustituimos:

$$\int \ln[(t-1)^2 + 2(t-1) + 2] dt = \int \ln(t^2 + 1 - 2t + 2t - 2 + 2) dt = \int \ln(t^2 + 1) dt$$

Hacemos la integral por partes

$$u = \ln(t^2 + 1); \quad du = \frac{2t}{t^2 + 1} dt$$
$$dv = dt \quad ; \quad v = t$$

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \cdot \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt$$

Dividimos los dos polinomios y descomponemos la integral

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \cdot \ln(t^2 + 1) - \int \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = t \cdot \ln(t^2 + 1) - \left[\int \left(2 - \frac{2}{t^2 + 1} \right) dt \right] =$$
$$= t \cdot \ln(t^2 + 1) - \int 2 dt + 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = t \cdot \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \operatorname{arctg} t + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\int \ln(t^2 + 1) dt = t \cdot \ln(t^2 + 1) - 2t + 2 \operatorname{arctg} t + C = (x+1) \cdot \ln((x+1)^2 + 1) - 2(x+1) + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C =$$
$$= (x+1) \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) - 2(x+1) + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

(2'5 puntos) Calcula $\int_0^{\pi} x \cdot \text{sen}^2(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

Por trigonometría, sabemos que: $\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, luego

$$\int_0^{\pi} x \cdot \text{sen}^2(x) dx = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x dx$$

Calculamos por partes la integral $\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x dx$

$$u = x; du = dx$$

$$dv = \cos 2x dx; v = \frac{\text{sen } 2x}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x dx &= \left[\frac{x \cdot \text{sen } 2x}{2} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \text{sen } 2x dx = \left(\frac{\pi \cdot \text{sen } 2\pi}{2} \right) - \left(\frac{0 \cdot \text{sen } 0}{2} \right) - \left[-\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \\ &= 0 - 0 + \left(\frac{\cos 2\pi}{4} \right) - \left(\frac{\cos 0}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{\pi} x \cdot \text{sen}^2(x) dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{\pi^2}{4}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$.

a) (1 punto) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza el recinto que determinan.

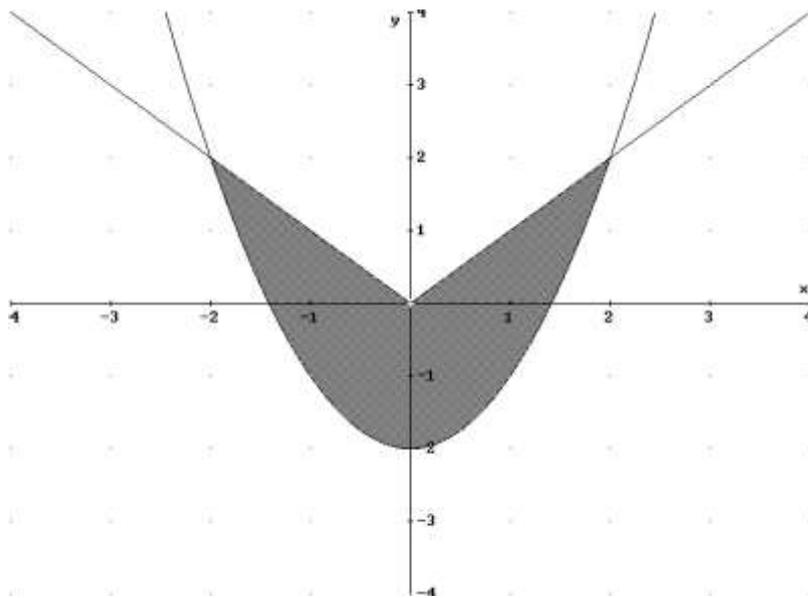
b) (1'5 puntos) Determina el área del recinto anterior.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3º cuadrante.

La función $f(x) = x^2 - 2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0, -2)$ y corta al eje X en los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$.



Calculamos los puntos de corte de las gráficas.

$$x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = 2 . \text{ Sólo sirve } x = 2$$

$$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -2 . \text{ Sólo sirve } x = -2$$

Luego, los puntos de corte son: $(-2, 2)$ y $(2, 2)$

b) Calculamos el área del recinto

$$A = 2 \cdot \int_0^2 [(x) - (x^2 - 2)] dx = 2 \cdot \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) = \frac{20}{3} u^2$$