OPCIÓN A

E1.- a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones, según el valor del parámetro λ

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para λ **= 1. (0,8 puntos)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \lambda = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-2\ ,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ \lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

$Sistema\ \ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ \lambda = 1 \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z \Rightarrow 1 - z + y + z = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (1 - \lambda\ ,\ 0\ ,\ \lambda)$$

E2.- Determinar la recta **s** que es simétrica de $r \equiv x+2=y=z-2$, respecto del plano $\pi \equiv x-z+2=0$ **. (2 puntos)**

Primero debemos de saber la posición relativa del plano y la recta. Si el producto de sus vectores directores es nulo, los vectores directores son perpendiculares y la recta **r** es paralela al plano; de no serlo se cortaran en un punto

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1\,,0\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,1\,,1)\cdot(1\,,0\,,-1)=1+0-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ elplano\ \pi\ son\ paralelos$$

Calculamos una recta **s** perpendicular al plano π, que queda definida por el vector director del plano que será su vector director y por un punto **R** de la recta **r**, (tomaremos el indicado en su ecuación). Hallaremos el punto **Q** de intersección de la recta s con el plano π, que es el punto medio de **R** con su simétrico **R'**, este punto y el vector director de **r** determinaran la recta **t** simétrica pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_\pi}=(1\,,0\,,-1) \\ R(-2\,,0\,,2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=0+0\lambda=0 \\ z=2-\lambda \end{cases} \Rightarrow Inter\sec ción\ con\ \pi \Rightarrow -2+\lambda-(2-\lambda)+2=0 \Rightarrow$$

$$\lambda-2+\lambda=0 \Rightarrow -2+2\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow Q\begin{cases} x=-2+1 \\ y=0 \\ z=2-1 \end{cases} \Rightarrow Q(-1\,,0\,,1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1=\dfrac{-2+x_{R'}}{2} \Rightarrow -2+x_{R'}=-2 \Rightarrow x_{R'}=0 \\ 0=\dfrac{0+y_{R'}}{2} \Rightarrow y_{R'}=0 \\ 1=\dfrac{2+z_{R'}}{2} \Rightarrow 2+z_{R'}=2 \Rightarrow z_{R'}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,1) \\ R'(0\,,0\,,0) \end{cases} \Rightarrow t \equiv x=y=z$$

E3.- Dada la función **f(x) = 3x⁴ + x³ -1**, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que **f(x)** se anula. **(2 puntos)**

$$f'(x)=12x^3+3x^2=3\,x^2(4x+1) \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow 3\,x^2(4x+1)>0 \Rightarrow \begin{cases} 3>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ x^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ 4x+1>0 \Rightarrow 4x>-1 \Rightarrow x>-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

	$-\infty$ $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$ ∞
3 > 0	**(+)**	**(+)**
x^2 > 0	**(+)**	**(+)**
$x>-\frac{1}{4}$	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in\Re\,/\,x>-\dfrac{1}{4}$ **Decrecimiento** $\forall x\in\Re\,/\,x<-\dfrac{1}{4}$

Mínimo relativo en $x=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)^4+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3-1=\dfrac{3}{256}-\dfrac{1}{64}-1=\dfrac{3-4-256}{256}=-\dfrac{257}{256}$

De decreciente pasa a creciente

Al ser los máximos absolutos $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4+x^3-1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} 3x^4+x^3-1=+\infty \end{cases}$ positivos y tener un mínimo absoluto (y relativo) en $x=-\dfrac{1}{4}$, supone que habrá **dos puntos** en los que f(x) se anula

E4.- Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cos x$ y el eje de las **x**, cuando **x** pertenece al intervalo $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$. **(2 puntos)**

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \in \left(0\,,\,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$$

$$I = \int x \cos x \, dx = x \; sen \; x - \int sen \; x \, dx = x \; sen \; x - (-\cos x) = x \; sen \; x + \cos x + K$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \cos x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \cos x \, dx = sen \; x \end{cases}$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = [x \; sen \; x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} \cdot sen \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) - (0 \cdot sen \; 0 + \cos 0) = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0\right) - (0 + 1) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) u^2$$

E5.- a) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces. **(1 punto)**

b) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas. **(1 punto)**

a)
Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces.

El espacio muestral al lanzar una moneda tres veces, siendo "C" cara y "X" cruz es el siguiente:
E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}, en total hay ocho sucesos ($2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$).

Me piden **p(una cara y dos cruces) =** $\dfrac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$ **= 3/8 = 0'375.**

b)
Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas.

Los sucesos son dependientes. Llamamos C_1^C y C_2^C, 1ª y 2ª carta no son copas respectivamente.

Me piden **$p(C_1^C \text{ y } C_2^C) = p(C_1^C \cap C_1^C) = p(C_1^C) \cdot p(C_2^C / C_1^C) =$**

= $\left(\dfrac{\text{número de no copas}}{\text{número de cartas}}\right) \cdot \left(\dfrac{\text{número de no copas, sabiendo que falta una}}{\text{número de cartas menos una}}\right)$ **= (30/40)·(29/39) = 29/52 ≅**
≅ 0'55769.

OPCIÓN B

E1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}$ calcúlense **a** y **b** para que se verifiquen,

$|MA|=2$ y $|M+B|=3$ donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

$a)$

$$\begin{cases} MA=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&7\\a+2b&2a+5b\end{pmatrix}\Rightarrow |MA|=2\Rightarrow\begin{vmatrix}3&7\\a+2b&2a+5b\end{vmatrix}=6a+15b-7a-14b=2 \\ M+B=\begin{pmatrix}1&1\\a&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\a+1&b+1\end{pmatrix}\Rightarrow |M+B|=3\Rightarrow\begin{vmatrix}2&1\\a+1&b+1\end{vmatrix}=2b+2-a-1=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-a+b=2\\-a+2b=2\end{cases}\Rightarrow b=0\Rightarrow -a+0=2\Rightarrow a=-2$$

E2.- Dada la recta $r\equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$ y el plano $\pi\equiv x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de **r** y π. **(0,8 puntos)**
b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de **r** y π. **(1,2 puntos)**

a) El plano y la recta pueden ser **paralelos,** si el producto escalar de sus vectores directores es nulo ya que son perpendiculares, en caso contrario tienen un punto de intersección

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=(1,-1,1)\\\overrightarrow{v_r}=(1,2,1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)\cdot(1,2,1)=1-2+1=0\Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{v_r}$$

El plano π y la recta **r** son **paralelos**

b) Hallaremos una recta **s** perpendicular al plano π que tiene como vector director el del plano y que pasa por en punto cualquiera **R** de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación); calcularemos el punto de intersección **P** de la recta **s** y el plano π, el punto **Q,** del plano α pedido, es el punto medio del vector **PR**, con ese dato hallaremos el plano pedido.

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{v_\pi}=(1,-1,1)\\R(1,-1,1)\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-1-\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}\Rightarrow 1+\lambda-(-1-\lambda)+1+\lambda=0\Rightarrow 2+2\lambda+1+\lambda=0\Rightarrow 3+3\lambda=0\Rightarrow$$

$$3\lambda=-3\Rightarrow\lambda=-1\Rightarrow P\begin{cases}x=1+(-1)\\y=-1-(-1)\\z=1+(-1)\end{cases}\Rightarrow P(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}x_Q=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\\y_Q=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}\\z_Q=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow Q\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\alpha\equiv x-y+z+D=0\Rightarrow\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+D=0\Rightarrow\frac{3}{2}+D=0\Rightarrow D=-\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha\equiv x-y+z-\frac{3}{2}=0\Rightarrow$$

$$\alpha\equiv 2x-2y+2z-3=0$$

E3.- Dada la función $f(x) = xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow \ln e^x = \ln 0 \Rightarrow No\ hay\ solución \Rightarrow e^x \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \Rightarrow Dom\,(f) = \forall x \in \Re$$

$$f'(x) = e^{-x} + (-1)xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 1-x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

$-\infty$ **1** ∞

$e^{-x} > 0$	**(+)**	**(+)**
x < 1	**(+)**	**(-)**
Solución	**(+)**	**(-)**

Creciente $\forall x \in \Re / x < 1$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / x > 1$

Máximo relativo en $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ **De creciente pasa a decreciente**

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + (-1)e^{-x} = -e^{-x}(2-x) \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow (-1) \cdot e^{-x}(2-x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ e^{-x} > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ 2 - x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$-\infty$ **2** ∞

-1 < 0	**(-)**	**(-)**
$e^{-x} > 0$	**(+)**	**(+)**
x < 2	**(+)**	**(-)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Cóncavo $\forall x \in \Re / x > 2$ **Convexo** $\forall x \in \Re / x < 2$

Punto de inflexión en $x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y = 0,\ cuando\ x \to$$

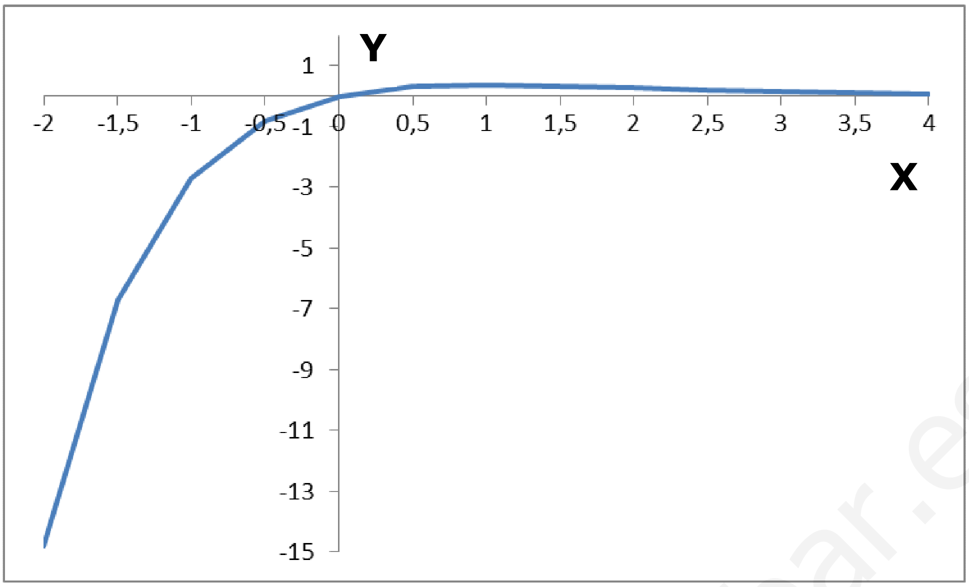
$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-(-x)} = \lim_{x\to\infty} xe^{x} = \infty^{\infty} = \infty \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x \to -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{xe^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x \to \infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ horizontal\ cuando\ x \to -\infty$$

Continuación del problema E3 de la opción B



E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)}$ **(1 punto)**

b) Calcular $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **(1 punto)**

$a)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{\ln(1+x)} = \frac{e^0 - \cos 0}{\ln(1+0)} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (sen\ x)}{\frac{1}{1+x}} = \frac{e^0 - (sen\ 0)}{\frac{1}{1+0}} = \frac{1-0}{\frac{1}{1}} = 1$$

$b)$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + K$$

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

E5.- La variable aleatoria **IMC** (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un **IMC** superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país.
(2 puntos)

Se trata de una distribución normal N(26,6). Calculemos las probabilidades pedidas:

Me piden **p(X ≥ 35) =** 1 - p(X ≤ 35) = 1 - $p\left(Z \le \dfrac{35 - 26}{6}\right)$ = 1 - p(Z ≤ 1’5) = 1 – 0’9332 **= 0’0668 = 6’68%**.