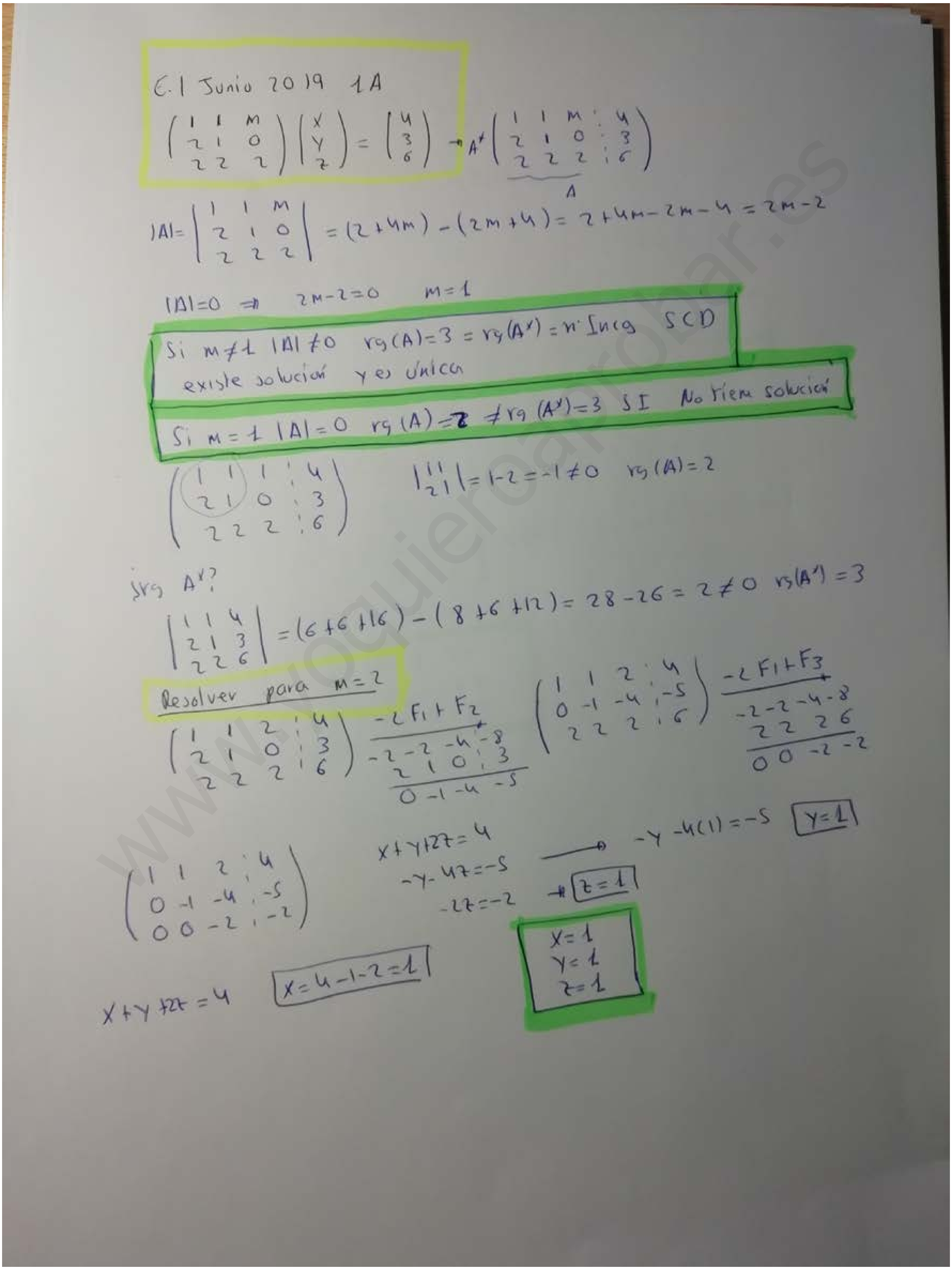
E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m.**(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**



E.1 Junio 2019 1A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^* \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & m & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad}_{A}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2+4m) - (2m+4) = 2+4m-2m-4 = 2m-2$$

$|A| = 0 \Rightarrow \quad 2m-2=0 \quad m=1$

Si $m \neq 1$ $|A| \neq 0$ $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^\circ$ Incog SCD
existe solución y es única

Si $m = 1$ $|A| = 0$ $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$ SI No tiene solución

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \quad rg(A) = 2$$

¿rg A^*?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (6+6+16) - (8+6+12) = 28-26 = 2 \neq 0 \quad rg(A^*) = 3$$

Resolver para $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_2} \begin{array}{cccc} -2 & -2 & -4 & -8 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & -1 & -4 & -5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3} \begin{array}{cccc} -2 & -2 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x+y+2z=4 \\ -y-4z=-5 \\ -2z=-2 \end{array}$$

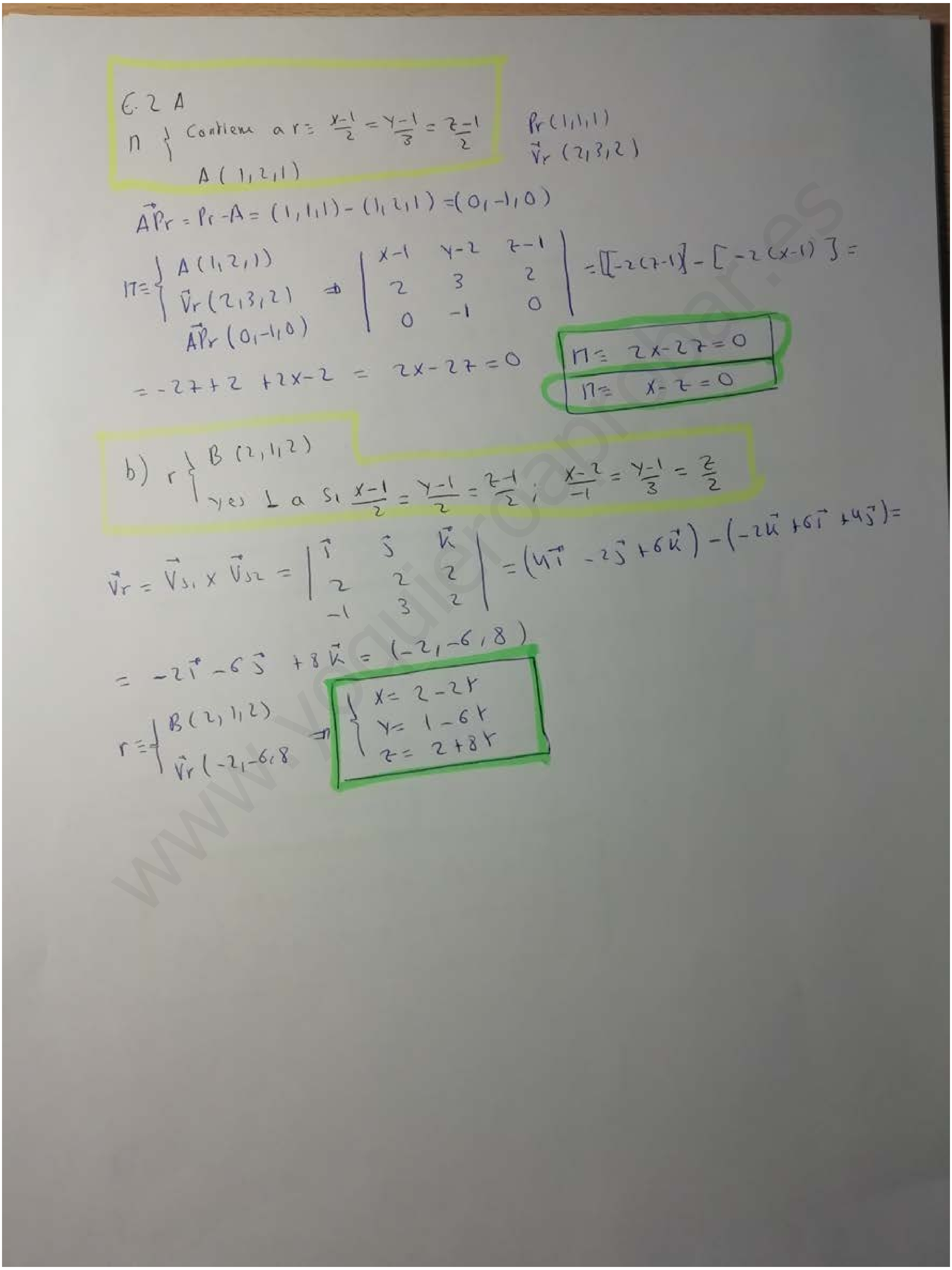
$-2z=-2 \rightarrow \boxed{z=1} \longrightarrow -y-4(1)=-5 \quad \boxed{y=1}$

$x+y+2z=4 \quad \boxed{x=4-1-2=1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}}$$

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \ \ 2, \ \ 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2, \ \ 1, \ \ 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**



E. 2 A

$\Pi \begin{cases} \text{Contiene a } r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2} \\ A(1,2,1) \end{cases}$ $\quad P_r(1,1,1)$ $\quad \vec{v}_r(2,3,2)$

$\vec{AP_r} = P_r - A = (1,1,1) - (1,2,1) = (0,-1,0)$

$$\Pi \equiv \begin{cases} A(1,2,1) \\ \vec{v}_r(2,3,2) \\ \vec{AP_r}(0,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [[-2(z-1)] - [-2(x-1)] =$$

$$= -2z + 2 + 2x - 2 = 2x - 2z = 0$$

$$\boxed{\Pi \equiv 2x - 2z = 0}$$

$$\boxed{\Pi \equiv x - z = 0}$$

b) $r \begin{cases} B(2,1,2) \\ \text{y es} \perp \text{a } s_1 \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}; \ \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2} \end{cases}$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{s_1} \times \vec{v}_{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}) - (-2\vec{k} + 6\vec{i} + 4\vec{j}) =$$

$$= -2\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k} = (-2,-6,8)$$

$$r \equiv \begin{cases} B(2,1,2) \\ \vec{v}_r(-2,-6,8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 - 2r \\ y = 1 - 6r \\ z = 2 + 8r \end{cases}}$$

E. 2A ⓑ

También lo podemos hacer por planos auxiliares, es más largo, pero está igualmente bien.

$$\vec{n} = \vec{v}_{s1} \times \vec{v}_{s2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -6, 8)$$

este vector se puede simplificar pero no lo voy a hacer.

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} B \\ \vec{v}_{s1} \\ \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = [16(x-2) - 4(y-1) - 12(z-2)]$$

$$- [-4(z-2) - 12(x-2) + 16(y-1)] = (16x - 32 - 4y + 4 - 12z + 24)$$

$$- [-4z + 8 - 12x + 24 + 16y - 16] = [16x - 4y - 12z - 4] - [-12x + 16y - 4z + 16] =$$

$$= \boxed{28x - 20y - 8z - 20 = 0}$$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} B \\ \vec{v}_{s2} \\ \vec{n} \end{cases} \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = [24(x-2) - 4(y-1) + 6(z-2)] -$$

$$- [-6(z-2) - 12(x-2) - 8(y-1)] =$$

$$= [24x - 48 - 4y + 4 + 6z - 12] - [-6z + 12 - 12x + 24 - 8y + 8] =$$

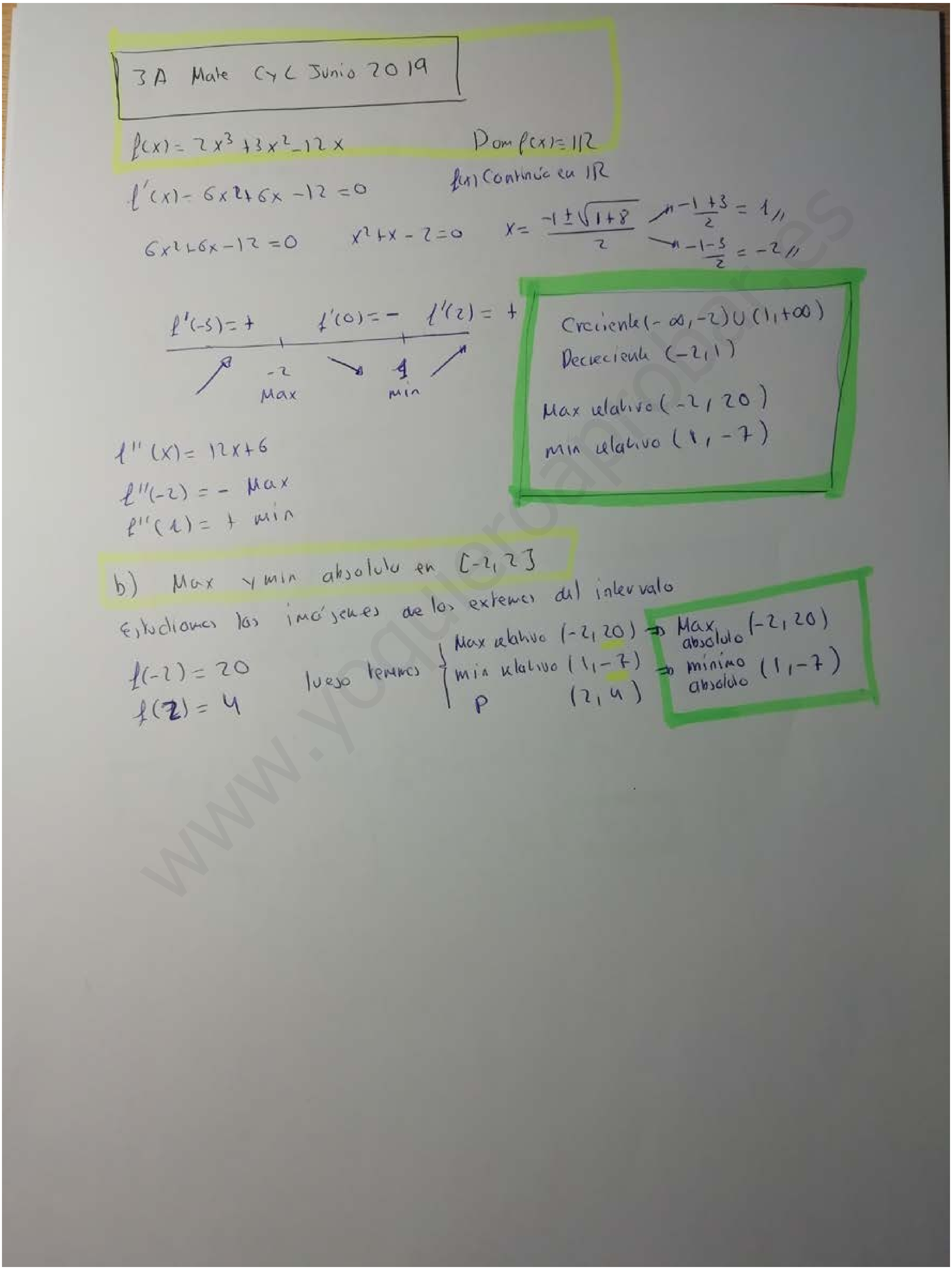
$$= \boxed{36x + 4y + 12z - 100 = 0}$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} 28x - 20y - 8z - 20 = 0 \\ 36 + 4y + 12z - 100 = 0 \end{cases}}$$

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**



3A Mate CyL Junio 2019

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

$f(x)$ Continua en $\mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$6x^2 + 6x - 12 = 0$ $x^2 + x - 2 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} \nearrow \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \searrow \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$

$f'(-3) = +$ $f'(0) = -$ $f'(2) = +$

$\nearrow$ -2 Max $\searrow$ 1 min $\nearrow$

Creciente $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Decreciente $(-2, 1)$

Max relativo $(-2, 20)$

min relativo $(1, -7)$

$f''(x) = 12x + 6$

$f''(-2) = -$ Max

$f''(1) = +$ min

b) Max y min absoluto en $[-2, 2]$

Estudiamos las imágenes de los extremos del intervalo

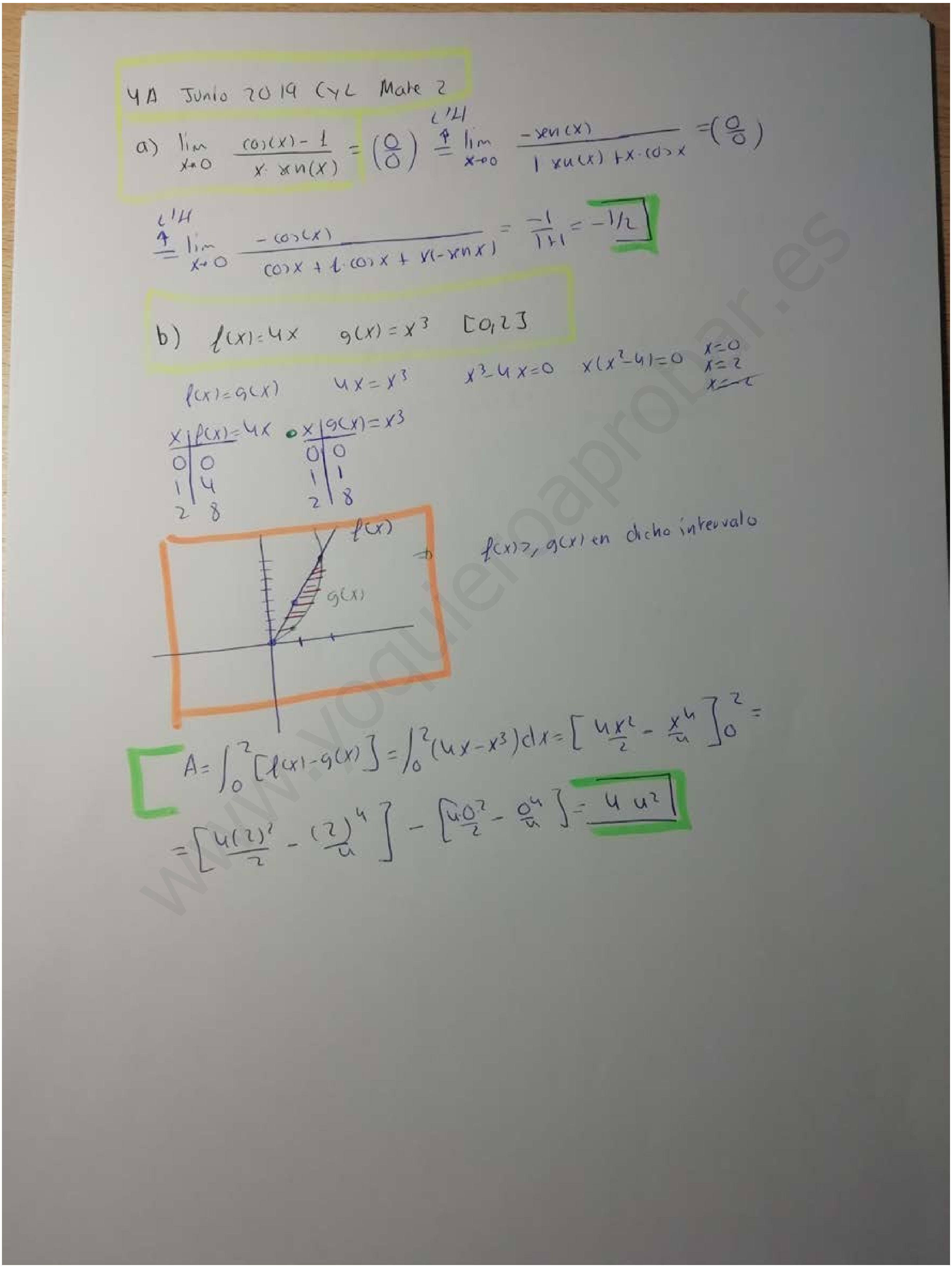
$f(-2) = 20$

$f(2) = 4$

luego tenemos $\begin{cases} \text{Max relativo } (-2, 20) \Rightarrow \text{Max absoluto } (-2, 20) \\ \text{min relativo } (1, -7) \Rightarrow \text{mínimo absoluto } (1, -7) \\ P \quad (2, 4) \end{cases}$

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\,\text{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x)=4x$ y de $g(x)=x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f\geq g$. **(1 punto)**



4A Junio 2019 CyL Mate 2

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\cdot \text{sen}(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}(x)}{1\cdot \text{sen}(x)+x\cdot\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{\cos x+1\cdot\cos x+x(-\text{sen}\,x)}=\frac{-1}{1+1}=\boxed{-1/2}$

b) $f(x)=4x$ $g(x)=x^3$ $[0,2]$

$f(x)=g(x)$ $4x=x^3$ $x^3-4x=0$ $x(x^2-4)=0$ $x=0$ $x=2$ ~~$x=-2$~~

x	f(x)=4x
0	0
1	4
2	8

x	g(x)=x3
0	0
1	1
2	8

→ $f(x)\geq g(x)$ en dicho intervalo

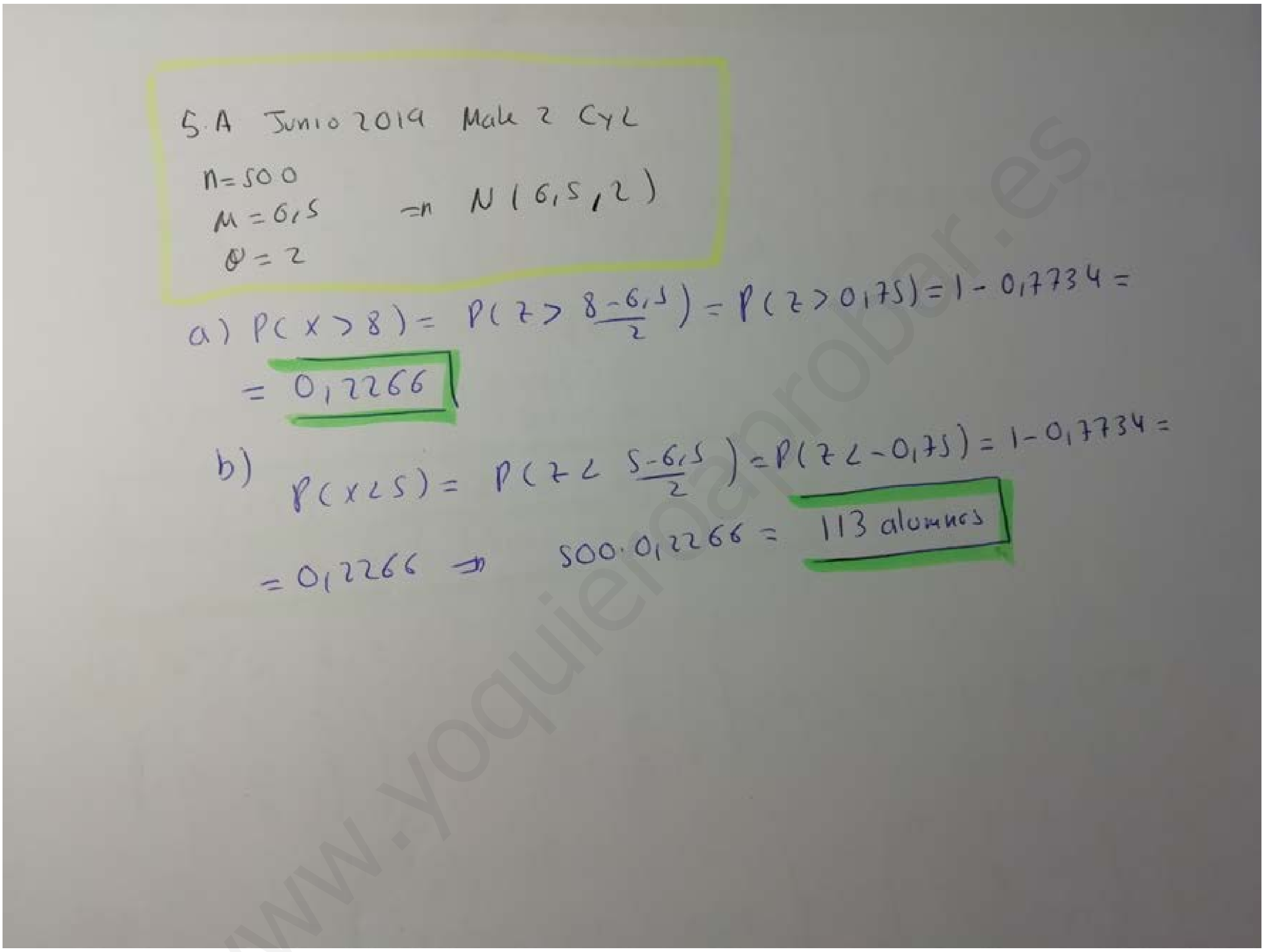
$A=\int_0^2[f(x)-g(x)]=\int_0^2(4x-x^3)dx=\left[\frac{4x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=$

$=\left[\frac{4(2)^2}{2}-\frac{(2)^4}{4}\right]-\left[\frac{4\cdot0^2}{2}-\frac{0^4}{4}\right]=\boxed{4\ u^2}$

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**



5.A Junio 2019 Mate 2 CyL

$n = 500$

$\mu = 6{,}5 \quad \Rightarrow \quad N(6{,}5, 2)$

$\sigma = 2$

a) $P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8-6{,}5}{2}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 =$

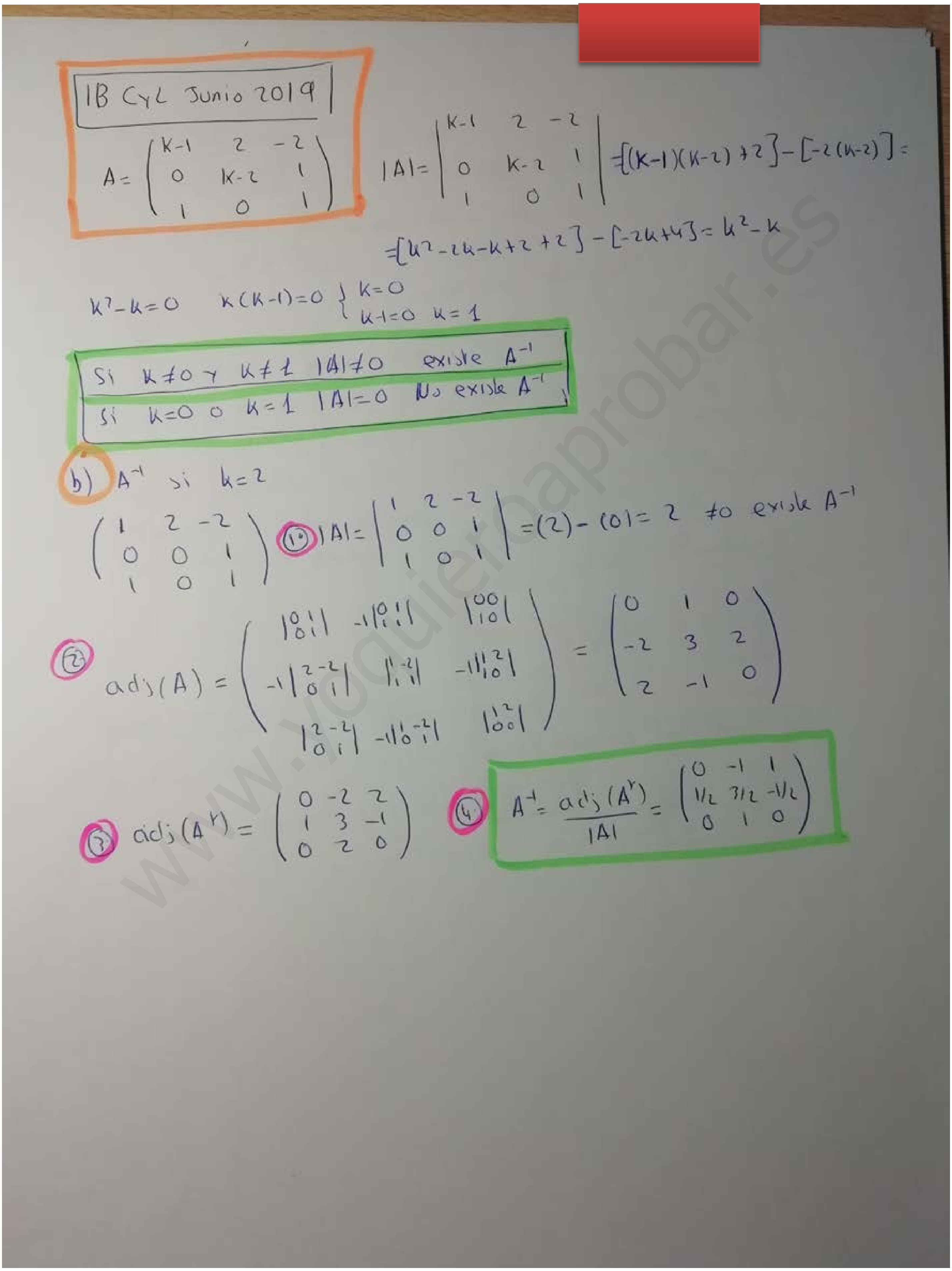
$= \boxed{0{,}2266}$

b) $P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-6{,}5}{2}\right) = P(Z < -0{,}75) = 1 - 0{,}7734 =$

$= 0{,}2266 \Rightarrow \quad 500 \cdot 0{,}2266 = \boxed{113 \text{ alumnos}}$

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$. **(1 punto)**



IB CyL Junio 2019

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(k-1)(k-2)+2]-[-2(k-2)] =$$

$$= [k^2-2k-k+2+2]-[-2k+4] = k^2-k$$

$$k^2-k=0 \quad k(k-1)=0 \begin{cases} k=0 \\ k-1=0 \quad k=1 \end{cases}$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ $|A| \neq 0$ existe A^{-1}

Si $k=0$ o $k=1$ $|A|=0$ No existe A^{-1}

b) A^{-1} si $k=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ①\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)-(0) = 2 \neq 0 \text{ existe } A^{-1}$$

$$② \quad adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$③ \quad adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

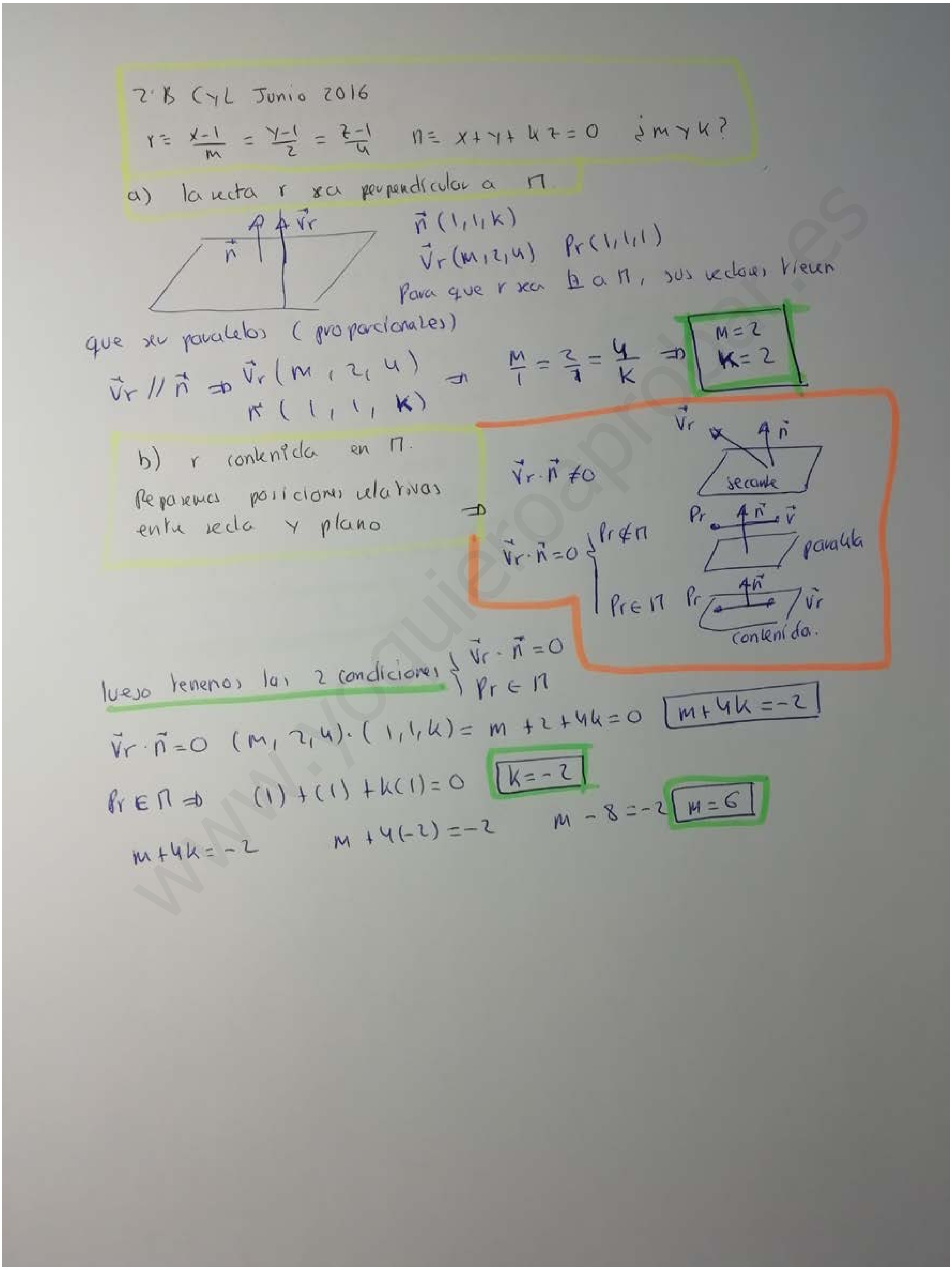
$$④ \quad A^{-1} = \frac{adj(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**

b) La recta r esté contenida en el plano $\boldsymbol{\pi}$. **(1 punto)**



2ºB CyL Junio 2016

$r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ $\quad \pi \equiv x+y+kz=0$ ¿m y k?

a) la recta r sea perpendicular a π.

$\vec{n}(1,1,k)$

$\vec{v}_r(m,2,4)$ $\quad P_r(1,1,1)$

Para que r sea ⊥ a π, sus vectores tienen que ser paralelos (proporcionales)

$\vec{v}_r \parallel \vec{n} \Rightarrow \begin{matrix}\vec{v}_r(m,2,4)\\ \vec{n}(1,1,k)\end{matrix} \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}m=2\\ k=2\end{matrix}}$

b) r contenida en π.

Repasemos posiciones relativas entre recta y plano $\Rightarrow$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} \neq 0$

$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \begin{cases} P_r \notin \pi \\ P_r \in \pi \end{cases}$

luego tenemos las 2 condiciones $\begin{cases} \vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \\ P_r \in \pi \end{cases}$

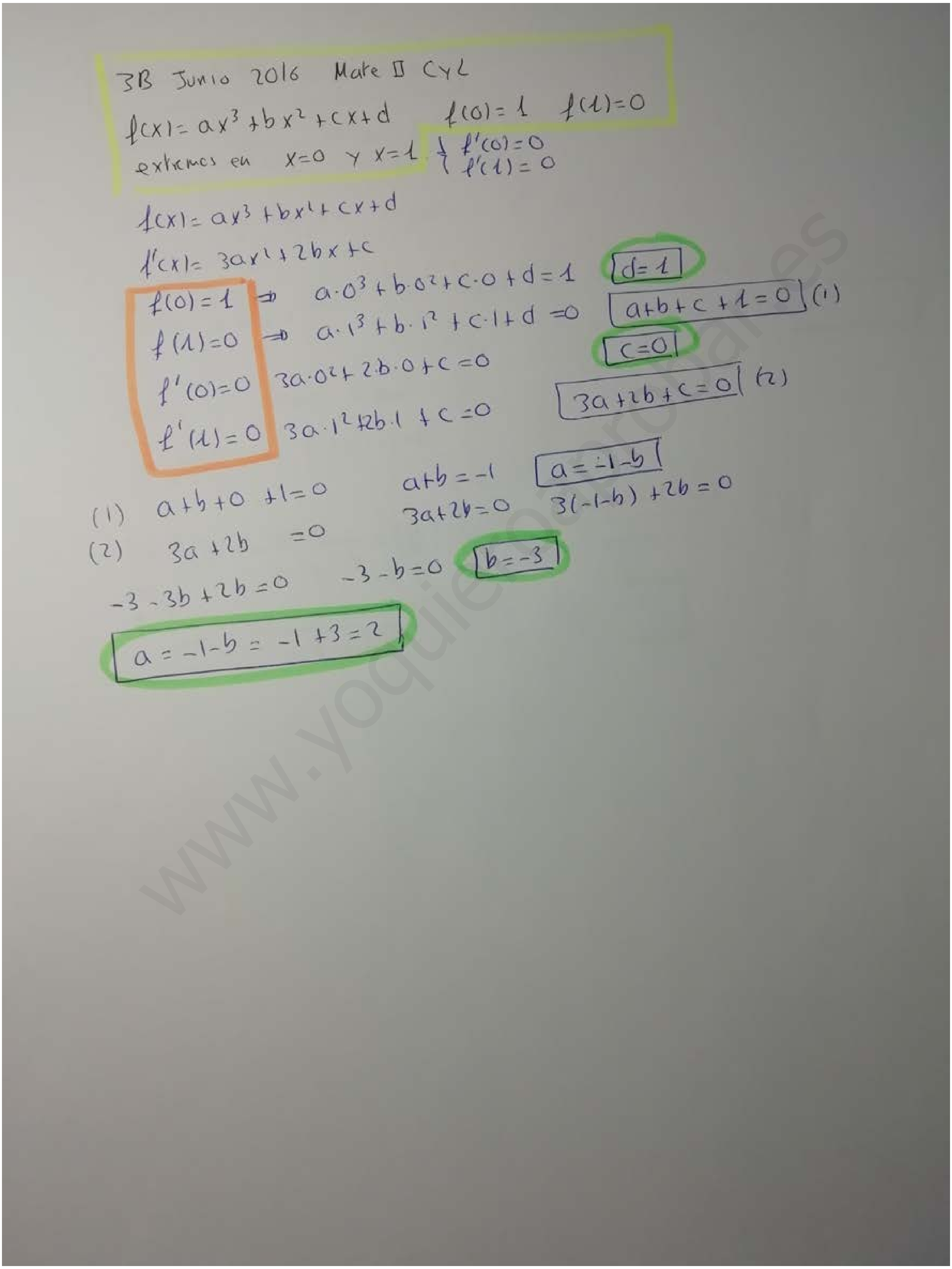
$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \quad (m,2,4)\cdot(1,1,k) = m+2+4k=0 \quad \boxed{m+4k=-2}$

$P_r \in \pi \Rightarrow \quad (1)+(1)+k(1)=0 \quad \boxed{k=-2}$

$m+4k=-2 \qquad m+4(-2)=-2 \qquad m-8=-2 \ \boxed{m=6}$

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d.

(2 puntos)



3B Junio 2016 Mate II CyL

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(0) = 1$ $f(1) = 0$

extremos en $x=0$ y $x=1$ $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0)=1 \Rightarrow a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1$ $\boxed{d=1}$

$f(1)=0 \Rightarrow a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 0$ $\boxed{a+b+c+1=0}$ (1)

$f'(0)=0$ $3a\cdot 0^2 + 2b\cdot 0 + c = 0$ $\boxed{c=0}$

$f'(1)=0$ $3a\cdot 1^2 + 2b\cdot 1 + c = 0$ $\boxed{3a+2b+c=0}$ (2)

(1) $a+b+0+1=0$ $a+b=-1$ $\boxed{a=-1-b}$

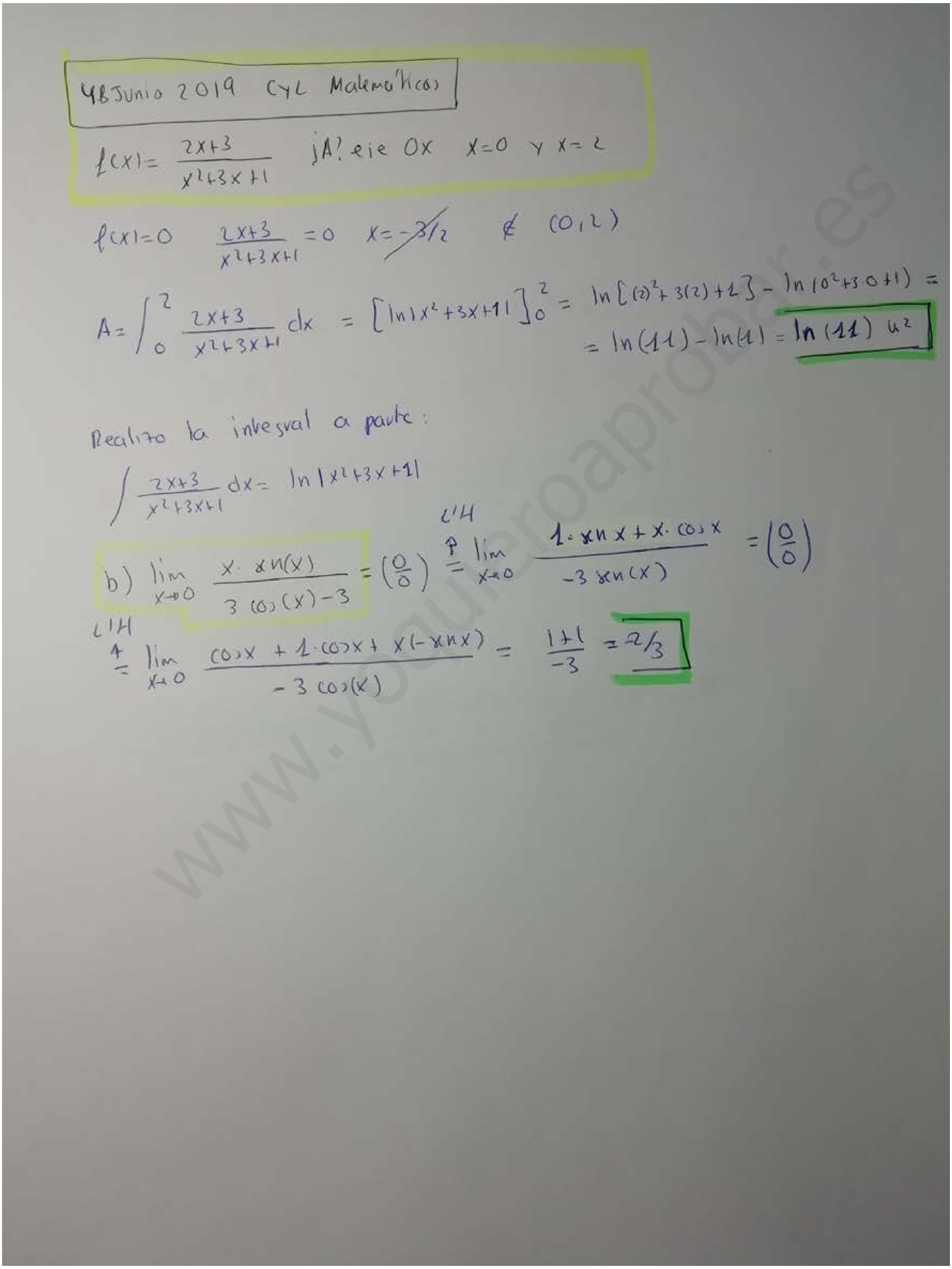
(2) $3a+2b=0$ $3a+2b=0$ $3(-1-b)+2b=0$

$-3-3b+2b=0$ $-3-b=0$ $\boxed{b=-3}$

$\boxed{a=-1-b=-1+3=2}$

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{3\cos(x)-3}$. **(1punto)**



4B Junio 2019 CyL Matemáticas

$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$ ¿A? eje Ox $x=0$ y $x=2$

$f(x)=0$ $\frac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0$ $\cancel{x=-3/2}$ $\notin (0,2)$

$$A = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \left[\ln|x^2+3x+1|\right]_0^2 = \ln[(2)^2+3(2)+1] - \ln(0^2+3\cdot 0+1) =$$

$$= \ln(11) - \ln(1) = \boxed{\ln(11)\ u^2}$$

Realizo la integral a parte:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+3x+1|$$

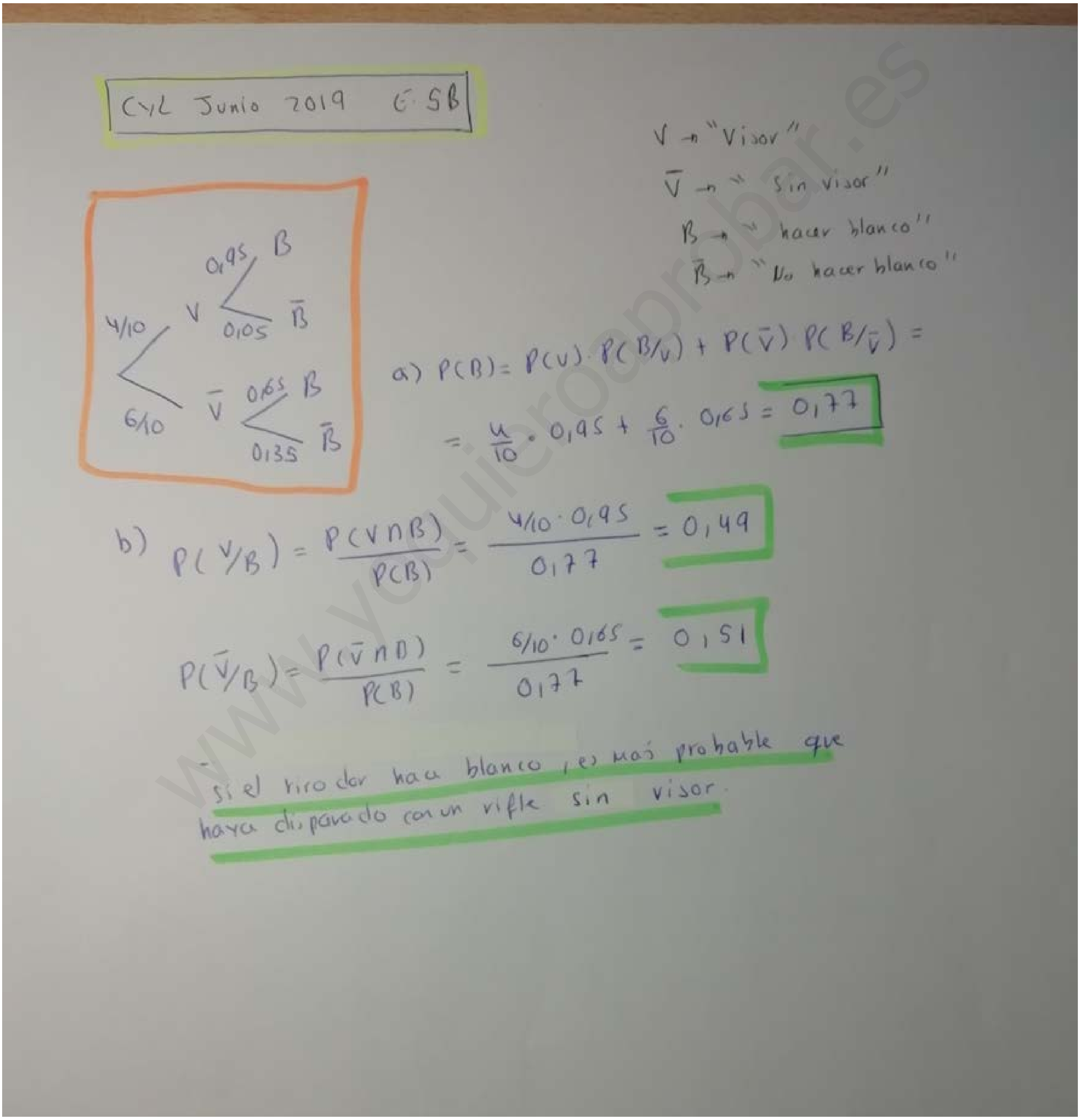
b) $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \mathrm{sen}(x)}{3\cos(x)-3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 \cdot \mathrm{sen}\,x + x \cdot \cos x}{-3\,\mathrm{sen}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1 \cdot \cos x + x(-\mathrm{sen}\,x)}{-3\cos(x)} = \frac{1+1}{-3} = \boxed{-2/3}$

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**



CyL Junio 2019 E 5B

V → "Visor"

$\bar{V}$ → " Sin visor"

B → " hacer blanco"

$\bar{B}$ → " No hacer blanco"

a) $P(B) = P(V) \cdot P(B/V) + P(\bar{V})\, P(B/\bar{V}) =$

$= \frac{4}{10} \cdot 0{,}95 + \frac{6}{10} \cdot 0{,}65 = \boxed{0{,}77}$

b) $P(V/B) = \frac{P(V \cap B)}{P(B)} = \frac{4/10 \cdot 0{,}95}{0{,}77} = \boxed{0{,}49}$

$P(\bar{V}/B) = \frac{P(\bar{V} \cap B)}{P(B)} = \frac{6/10 \cdot 0{,}65}{0{,}77} = \boxed{0{,}51}$

Si el tirador hace blanco, es más probable que haya disparado con un rifle sin visor.