UNIDAD 15: Distribuciones discretas. Distribución binomial

ACTIVIDADES INICIALES-PÁG. 382

1. En las familias formadas por cuatro hijos, ¿qué probabilidad hay de que estos sean dos mujeres y dos varones?

P (2varones y 2 mujeres) = $\frac{6}{16} = 0{,}375$

2. El 40% de los alumnos de una clase son aficionados al fútbol. En una pandilla de cinco amigos de la clase:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres aficionados al fútbol?

b) ¿Y de que los aficionados al fútbol no sean mayoría?

Las probabilidades buscadas son:

a) $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$.

b) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= \binom{5}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}6826$$

3. Un participante en las olimpiadas en tiro olímpico tiene una probabilidad de 5/6 de hacer blanco. Si realiza cuatro disparos, calcula:
a) La probabilidad de hacer dos blancos.

b) La probabilidad de hacer dos o más blancos.

Las probabilidades son, en este caso:

a) $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0{,}1157$

b) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$$= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 = 0{,}1157 + 0{,}3858 + 0{,}4823 = 0{,}9838$$

4. Una fábrica de galletas las empaqueta en cajas de cien unidades cada una. Para comprobar la eficacia de la producción analiza 80 cajas, comprobando el número de galletas defectuosas que cada una contiene y obtiene los siguientes resultados:

Nª de galletas defectuosas	0	1	2	3	4	5	6
Nº de cajas	40	15	10	9	3	2	1

Halla el número de cajas que se encuentran en los intervalos (μ – σ, μ + σ) , (μ – 2σ, μ + 2σ) y (μ –3 σ, μ + 3σ).

Sabemos que $\mu = 1{,}125 \ y \ \sigma = 1{,}452$.

En $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma) = (-\ 0{,}327;\ 2{,}577)$ hay 65 cajas defectuosas, es decir, el 81,25%.

En $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma) = (-\ 1{,}779;\ 4{,}029)$ hay 77 cajas defectuosas, es decir, el 96,25%.

En $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma) = (-\ 3{,}231;\ 5{,}481)$ hay 79 cajas defectuosas, es decir, el 98,75%.

Esta distribución no tiene un comportamiento “normal”.

ACTIVIDADES de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS-PÁG. 395

1. Iniciales repetidas. ¿Cuántos habitantes debe tener una ciudad para asegurar que hay al menos dos habitantes cuyas tres iniciales, del nombre y de los dos apellidos, coincidan? Suponemos que sólo se considera el primer nombre propio y 26 letras del alfabeto.

Puesto que tanto el nombre de pila como los dos apellidos pueden comenzar por cualquiera de las 26 letras del alfabeto, por el principio de multiplicación de la combinatoria, tenemos 26 · 26 · 26 = 17 576 conjuntos ordenados distintos de tres iniciales.

Por el principio de distribución, el número mínimo de habitantes necesarios para garantizar que existen dos con las mismas iniciales será 17 577.

Con esta situación los nidos son r = 17 576, es decir, los conjuntos ordenados distintos de tres iniciales; y las palomas son el número mínimo de habitantes, n = 17 577.

2. Correspondencia. Diecisiete personas mantienen correspondencia por carta, cada una con todas las demás. En sus cartas solamente tratan 3 temas. Cada par de personas trata en sus cartas sólo uno de estos temas. Demuestra que hay, al menos, 3 personas que se escriben sobre el mismo tema.

Seleccionaremos una persona, digamos A. Mantiene correspondencia con las otras 16 restantes. Como solamente hay tres temas, según el principio del palomar, debe escribirse al menos con seis de ellas sobre el mismo tema.

Para fijar ideas, supongamos que A se escribe con al menos con 6 de las restantes 16 sobre el tema I. Si alguna de estas seis se escribe con otra persona sobre el tema I, entonces ya hay tres escribiéndose sobre el tema I.

Supongamos que estas seis personas se escriben sobre los temas II y III. Si B es una de estas seis, entonces, por el principio del palomar, debe escribirse al menos con tres de las otras 5 sobre uno de los dos temas, por ejemplo el tema II.

Ahora hay dos posibilidades para estas últimas tres personas. Si alguna se escribe con otra sobre el tema II, ya hemos encontrado tres personas que se escriben sobre el tema II. Si, por el contrario, ninguna de las tres se escribe con las otras sobre el tema II, entonces las tres deben escribirse sobre el teme III, con lo que está probada la afirmación del enunciado.

ACTIVIDADES de NUEVAS TECNOLOGÍAS-PÁG. 397

1. El coeficiente de inteligencia es una variable que se distribuye según la normal N (100, 15). Halla:

a) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un coeficiente de 80.

b) La probabilidad de que un individuo elegido al azar tenga un coeficiente entre 92 y 112.

En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución normal N (100, 15). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar $P(X = 80)$ y para ello elegimos **normalpdf(80,100,15)** y obtenemos 0,0109.

b) Queremos hallar $P(92 \leq X \leq 112)$ y para ello elegimos **normalcdf(92,112,100,15)** y obtenemos 0,4912.

2. La duración en horas de cierto tipo de congeladores tiene una distribución normal, de media 150 000 horas y una desviación típica de 8000 horas. Calcula:

a) La probabilidad de que un congelador de ese tipo dure al menos 165 000 horas.

b) El tanto por ciento de congeladores con una duración comprendida entre 130 000 y 160 000 horas.

c) ¿Cuál es el máximo número de horas que duran el 68% de los congeladores?

En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución normal N (150000, 8000). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar $P(X \geq 165000)$ y para ello elegimos **normalcdf(1650000,1000000,150000,8000)** y obtenemos 0,0304 . Al no tener el límite superior ponemos un valor muy grande.

b) Queremos hallar $P(130000 \leq X \leq 160000)$ y para ello elegimos **normalcdf(130000,160000,150000,8000)** y obtenemos 0,8881 es decir el 88,81% de los congeladores.

c) En este caso queremos hallar el valor de a de modo que $P(X \leq a) = 0,68$ y para ello elegimos **invNorm(0.68, 150000, 8000)** y obtenemos 153741,59 , es decir que 153 742 es el número máximo de horas que duran el 68% de los congeladores.

3. El departamento de control de calidad de una empresa informática determina que el 3% de los chips fabricados son defectuosos. Halla la probabilidad de que en una caja de 25 chips haya:

a) Como máximo 4 defectuosos.

b) Al menos 18 buenos.

c) Entre 8 y 10 defectuosos.

En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución binomial B(25; 0,03). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P(X ≤ 4) y para ello elegimos **binomcdf(25,0.03,4)** y obtenemos 0,9992.

b) Para hallar la probabilidad de que al menos haya 18 chips buenos, hallamos la probabilidad de que como máximo haya 7 defectuosos. Para ello hallamos P(X ≤ 7) mediante **binomcdf(25,0.03,7)** y obtenemos 0,9999.

c) Queremos hallar P (8 ≤ X ≤ 10) y como sabemos que P (8 ≤ X ≤ 10) = P (X = 8) + P (X = 9) + P(X = 10) introducimos en la calculadora: **binompdf(25,0.03,8)+ binompdf(25,0.03,9)+ binompdf(25,0.03,10)** y obtenemos $4,4873 \cdot 10^{-7}$.

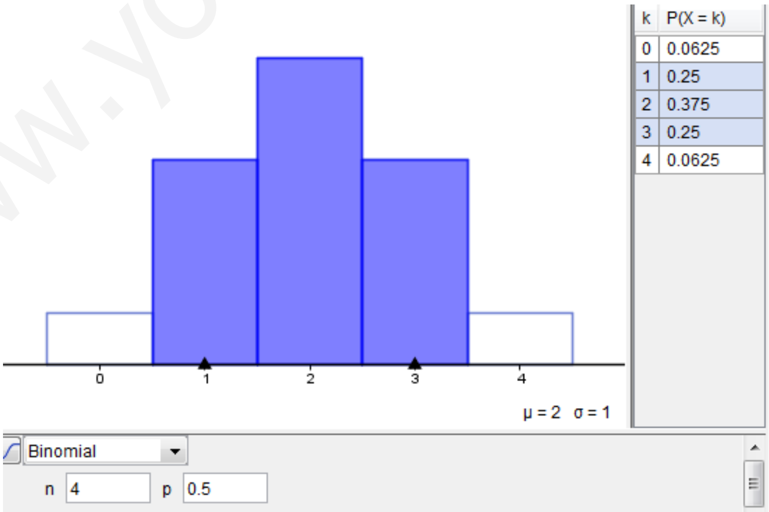
ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 400

1. En el lanzamiento al aire de cuatro monedas consideramos la variable aleatoria "número de caras obtenidas".
a) Encuentra la función de probabilidad asociada a esta variable aleatoria.
b) Realiza el gráfico adecuado.
c) Halla la media o valor esperado y la desviación típica.

La solución queda:
a) La función de probabilidad es:

Número de caras	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

b) El gráfico queda:



c) La media y la desviación típica son:

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - 2^2} = 1$$

2. Consideramos el experimento aleatorio de sacar una ficha de un domino y considerar como variable aleatoria la diferencia de puntos en valor absoluto. Halla la función de probabilidad asociada a esta variable aleatoria, así como el valor esperado y la desviación típica.

La función de probabilidad es:

Diferencia de puntos X	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad P_i	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

La media y la desviación típica son: $\mu = 2$ y $\sigma = 1.73$.

3. De una baraja española de 40 cartas extraemos 4 cartas una detrás de la otra y sin devolver las extraídas al mazo. Sea la variable aleatoria "número de ases extraídos". Halla:
a) La función de probabilidad asociada a esta variable aleatoria.

b) La probabilidad de extraer al menos dos ases.

c) La probabilidad de extraer, como máximo, tres ases.

a) La función de probabilidad es:

Número de ases X	0	1	2	3	4
Probabilidad P_i	0,6445	0,3125	0.0414	0,0016	0,0001

b) La probabilidad de extraer al menos dos ases es: $P(X \geq 2) = 0{,}0433$

c) La probabilidad de extraer, como máximo, tres ases es:

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$$

4. Completa la siguiente tabla correspondiente a una función de probabilidad de la que se sabe que la esperanza matemática vale 1,45. Halla además la desviación típica.

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P_i	**0,2**	**x**	**0,45**	**y**

Se debe cumplir:

$$\begin{cases} x + y = 0{,}35 \\ 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot x + 2 \cdot 0{,}45 + 3 \cdot y = 1{,}45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}25 \\ y = 0{,}10 \end{cases}$$

La desviación típica vale:

$$\sigma = \sqrt{0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,25 + 2^2 \cdot 0,45 + 3^2 \cdot 0,10 - 1,45^2} = 0,921$$

5. Una variable aleatoria discreta X muestra una distribución de probabilidad dada por: $P(X=a) = t \cdot (a-1)$, tomando a los valores 1,2,3,4. Halla t, la esperanza matemática y la desviación típica.

La función de probabilidad es:

X	1	2	3	4
P_i	0	t	2t	3t

Como se debe cumplir que 6t = 1; entonces $t = \frac{1}{6}$ y la función de probabilidad queda:

X	1	2	3	4
P_i	**0**	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

La esperanza matemática y la desviación típica son:

$$\mu = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = 3,33$$

$$\sigma = \sqrt{1^2 \cdot 0 + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{2}{6} + 4^2 \cdot \frac{3}{6} - 3,33^2} = 0,76$$

6. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta que toma los valores 1,2 o 3 viene dada por:

$$P(X) = \begin{cases} m & si \quad X = 1 \\ 3m^3 + 3m^2 - 2m & si \quad X = 2 \\ m^3 + m^2 & si \quad X = 3 \end{cases}$$

a) Halla el valor de m.

b) Halla P (X $\geq$ 2) y P (1 $\leq$ X < 3).

a) Se debe verificar que $m + 3m^3 + 3m^2 - 2m + m^3 + m^2 = 1$. Operando queda la ecuación:

$4m^3 + 4m^2 - m - 1 = 0$ cuyas soluciones son: m = -1 ; m = - 0,5 ; m = 0,5. Las dos primeras no son validas en el contexto del problema. La solución válida es m = 1/2 = 0,5

b) La función de probabilidad queda:

$$P(X)=\begin{cases}\frac{1}{2} & si \quad X=1\\ \frac{1}{8} & si \quad X=2\\ \frac{3}{8} & si \quad X=3\end{cases}$$

Las probabilidades pedidas son:

- P (X $\geq$2) = P(X = 2) + P(X = 3) = $\frac{1}{2}=0{,}5$
- P (1$\leq$ X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = $\frac{5}{8}=0{,}625$

7. En una caseta de feria se apuesta tirando al aire dos monedas, el feriante paga 40 € si salen dos caras y el que apuesta debe pagar al feriante 15 € en caso contrario. ¿Es justa esta apuesta?

Para que sea justa la apuesta se debe cumplir que la ganancia y la pérdida esperada sean iguales.

Nº Caras	0	1	2
Probabilidad	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

No es justa puesto que $40\cdot\frac{1}{4}-15\cdot\frac{3}{4}=-\frac{5}{4}\neq 0$

8. Un juego de azar consiste en disparar un dardo a una diana marcada con los números del 1 al 10. Para jugar y poder lanzar un dardo a la diana hay que pagar 2 €. Si se acierta en un número múltiplo de 5 el jugador recibe 10 € y en caso contrario pierde 0,15 €. ¿Es justo el juego?

No es justo pues la esperanza de ganar es $10\cdot\frac{2}{10}=2$ y la de perder es $0{,}15\cdot\frac{8}{10}+2=2{,}12$

9. En las familias de cinco hijos, en las que se supone que la probabilidad de que un hijo sea varón o mujer es la misma, consideramos la variable aleatoria "número de hijas de la familia".
a) ¿Cómo es esta distribución de probabilidad? construye la tabla correspondiente.

b) Halla la esperanza matemática y la desviación típica.

c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una familia con al menos 3 hijas?

d) ¿Y la probabilidad de encontrar una familia con 1 hija como máximo?

a) Es una distribución binomial B (5; 0,5). La tabla correspondiente a esta es:

X = Nº hijas	**0**	**1**	2	3	4	5
P_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) La esperanza matemática y la desviación típica valen:

$$\mu = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5 \text{ y } \sigma = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}12$$

c) La probabilidad de encontrar una familia con al menos 3 hijas es:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{16}{32} = 0{,}5$$

d) La probabilidad de encontrar una familia con 1 hija como máximo es:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{6}{32} = 0{,}1875$$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 401

10. Una variable aleatoria discreta X sigue una distribución binomial B (8; 0,6). Halla:

a) La función de probabilidad.

b) La media y la desviación típica.

c) Las siguientes probabilidades: P(X = 5) ; P(X < 2) y P(X $\geq$ 1).

a) La tabla correspondiente a esta distribución es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	0,0007	0,0079	0,0413	0,1239	0,2322	0,2787	0,2090	0,0896	0,0168

b) La esperanza matemática y la desviación típica valen:

$$\mu = 8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8 \text{ y } \sigma = \sqrt{8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = 1{,}39$$

c) Las probabilidades pedidas son:

- P (X = 5) = 0,2787.

- P (X < 2) = P (X = 0) + P (X = 1) = 0,0086.

- P (X $\geq$ 1) = 1 – P (X = 0) = 1- 0,0007 = 0,9993.

11. Una moneda esta lastrada de forma que la probabilidad de obtener cara es triple de la de obtener cruz. Lanzamos 5 veces la moneda. Halla:

a) La probabilidad de obtener tres caras.

b) La probabilidad de obtener cuatro cruces.

a) Tenemos una distribución binomial B (5; $\frac{3}{4}$). La probabilidad de obtener 3 caras es:

P(X =3) = 0,2637

b) Tenemos una distribución binomial B (5 ; $\frac{1}{4}$). La probabilidad de obtener 4 cruces es

P (X = 4) = 0,0146

12. En una fábrica de galletas de chocolate saben que el 1% de las galletas que envasan, en paquetes de diez galletas cada uno, están rotas. ¿Cuál es la probabilidad de comprar un paquete en el que todas las galletas estén enteras?

Sigue una distribución binomial B (10; 0,99). La probabilidad de que las 10 galletas estén enteras es

P (X = 10) = 0,9044

13. La probabilidad de que un estudiante de 2º de Bachillerato de un centro elija Biología como asignatura optativa es 0,7. En un grupo de 16 estudiantes determina:

a) La probabilidad de que ninguno elija Biología.

b) La probabilidad de que al menos 14 elijan Biología.

c) La probabilidad de que como máximo 3 no elijan Biología.

La variable aleatoria X, número de estudiantes que eligen Biología, sigue una distribución binomial B (16; 0,7). Las probabilidades pedidas son:

a) P (X = 0) = $4{,}3047 \cdot 10^{-9}$

b) P (X $\geq$14) = P (X = 14) + P (X = 15) + P (X = 16) = 0,0994.

c) La variable aleatoria X, número de estudiantes que no eligen Biología, sigue una distribución binomial B (16; 0,3). La probabilidad pedida es P (X$\leq$3) = P (X = 0) + P (X = 1) + P(X = 2) + P (X = 3) = 0,2459

14. En una gran urbanización se sabe que el 75% de los vecinos tienen conexión a Internet en su domicilio. Elegimos 20 vecinos al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos 18 tengan conexión a Internet? ¿Cuántos cabe esperar que tengan conexión a Internet?

La variable aleatoria X, número de vecinos con conexión a Internet sigue una distribución binomial B (20; 0,75).

La probabilidad de que al menos 18 tengan conexión a Internet viene dada por:

P (X $\geq$18) = P (X = 18) + P (X = 19) + P (X = 20) = 0,0913.

Cabe esperar que 20 · 0,75 = 15 tengan conexión a Internet.

15. Según diversos estudios, aproximadamente el 85% de los pacientes que sufren cáncer de pulmón son fumadores o personas que han dejado de fumar recientemente. En un hospital se han diagnosticado 20 casos de cáncer de pulmón, ¿Cuál es la probabilidad de que fumen o hayan dejado de fumar recientemente al menos 18? ¿Qué probabilidad hay de que no fume ninguno?

La variable aleatoria X, fumadores, sigue una distribución binomial B (20; 0,85).

Las probabilidades pedidas son:

- P (X $\geq$ 18) = P (X = 18) + P (X = 19) +P (X = 20) = 0,4049.

- P (X = 0) = 3,325 · 10^{-17}.

16. El profesor de inglés plantea una actividad en clase en la que los alumnos deben completar diez frases con los verbos modales *must*, *can't* y *might*. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que no ha estudiado haga más de seis frases bien?

La variable aleatoria X, número de frases bien sigue una distribución binomial B (10; $\frac{1}{3}$).

La probabilidad de hacer más de seis bien es:

P (X > 6) = P (X = 7) + P (X = 8) + P (X = 9) + P (X = 10) = 0,0197.

17. En una estación de tren de alta velocidad se observa que el 2% de los trenes que pasan por ella llegan con retraso. Un día pasan 16 trenes por esa estación ¿cuál es la probabilidad de que entre 8 y 12 lleguen a su hora?

La variable aleatoria X, número de trenes que llegan a su hora sigue una distribución binomial B (16; 0,98)

La probabilidad de que entre 8 y 12 lleguen a su hora es:

P (8 < X < 12) = P (X = 9) + P (X = 10) + P (X = 11) = 1,162 · 10^{-5}

18. Un dispositivo electrónico incorporado a determinados ordenadores tiene tres componentes iguales que funcionan de forma independiente. En la siguiente recogemos el número de componentes que fallan al analizar 500 dispositivos:

Nº de componentes que fallan	0	1	2	3
Nº de dispositivos	361	124	15	0

a) Ajusta una distribución binomial a estos datos.

b) Estima la probabilidad de que fallen al menos dos componentes.

a) Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \frac{154}{500} = 0{,}308$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 3p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: 3p = 0,308 $\Rightarrow$ p = 0,1 y q = 0,9

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (3; 0,1). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$500 \cdot P_i$	Valores	Valores	Diferencias

			teóricos	observados	
0	$0{,}9^3 = 0{,}729$	364,5	365	361	4
1	$3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$	121,5	122	124	2
2	$3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027$	13,5	14	15	1
3	$0{,}1^3 = 0{,}001$	0,5	1	0	1

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

b) La probabilidad de que fallen al menos dos componentes es:

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}027 + 0{,}001 = 0{,}028.$

La frecuencia relativa de que fallen al menos dos componentes es: $\dfrac{15+0}{500} = 0{,}030$, que está muy próxima a la probabilidad anterior.

19. A 150 personas se les pasa una prueba de razonamiento lógico obteniéndose los siguientes resultados sobre el número de errores cometidos:

Nº de errores	0	1	2
Nº de personas	**113**	**33**	**4**

Ajusta estos datos a una distribución binomial. ¿Se puede considerar bueno este ajuste realizado?

Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \dfrac{41}{150} = 0{,}2733$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 2p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: $2p = 0{,}2733 \Rightarrow p = 0{,}1367 \approx 0{,}14$ y $q = 0{,}8633 \approx 0{,}86$.

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (2; 0,14). En la tabla aparecen todos los cálculos.

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$150 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}86^2 = 0{,}7396$	110,94	111	113	2
1	$2 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86 = 0{,}2408$	36,12	36	33	3
23	$0{,}14^2 = 0{,}0196$	2,94	3	4	1

Las diferencias son muy pequeñas. Podemos afirmar que el ajuste es bueno, es decir, los datos iniciales provenían de una distribución binomial.

ACTIVIDADES ACCESO UNIVERSIDAD-PÁG. 402

1. Tiramos un dado cúbico al aire. La probabilidad de obtener cualquier número es proporcional a ese número, es decir P(X = a) = t · a. Consideramos la variable aleatoria X como el número obtenido en su cara superior. Halla el valor de t y la función de distribución asociada a esta variable.

Para hallar el valor de t utilizamos:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1.$$

Por tanto: t + 2t + 3t + 4t + 5t + 6t = 1 ; t = $\frac{1}{21}$

La función de probabilidad es:

X	**1**	**2**	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

2. Un modelo de una determinada marca de coches tiene probabilidad 0,90 de durar más de un año sin ningún fallo mecánico. Un concesionario tiene 15 vehículos de esa marca. Halla la probabilidad de que entre 11 y 14 duren más de un año sin fallos. ¿Cuántos de esos vehículos se espera que duren más de un año sin fallos?

La variable aleatoria X, número de vehículos que duran más de un año sin fallo mecánico, sigue una distribución binomial B (15; 0,9).

La probabilidad de que entre 11 y 14 lleguen a su hora es:

$$P(11 < X < 14) = P(X = 12) + P(X = 13) = 0{,}3954$$

Cabe esperar que 15 · 0,9 = 13,5 más de 13 vehículos duren más de un año sin fallo mecánico.

3. Un laboratorio farmacéutico dice que su mejor medicamento causa efectos secundarios a 8 de cada 100 pacientes. Con el fin de valorar esto se eligen 12 pacientes al azar. Halla las siguientes probabilidades:

a) Ninguno de esos pacientes tenga presente efectos secundarios.

b) Al menos 3 pacientes tengan efectos secundarios.

c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que se espera presenten efectos secundarios?

a) La variable aleatoria X, número de pacientes con efectos secundarios por el medicamento sigue una distribución binomial B (12; 0,08).

La probabilidad de que ninguno tenga efectos secundarios es: P(X = 0) = 0,3677

b) La probabilidad de que al menos 3 tengan efectos secundarios es:

$$P(X \geq 3) = 1- [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 0{,}0652$$

c) El número medio de pacientes que se espera con efectos secundarios por el medicamento es $12 \cdot 0{,}08 = 0{,}96$, es decir, un paciente.

4. Un alumno realiza un examen de inglés tipo test con 18 cuestiones y cinco posibles respuestas en cada una de ellas de las que solo una es correcta. Si para aprobar debe tener al menos 12 cuestiones con respuesta correcta y para obtener sobresaliente ha de tener al menos 16 ¿cuál es la probabilidad de que suspenda si no ha estudiado y ha contestado al azar? ¿Y de que obtenga sobresaliente?

La variable aleatoria X, número de cuestiones correctas sigue una distribución binomial B $\left(18; \frac{1}{5}\right)$.

La probabilidad de aprobar es:

P (X $\geq$ 12) = P (X = 12) + P (X = 13) + P (X = 14) + P (X = 15) +P (X = 16) + P (X = 17) + P (X = 18) = $2{,}2453 \cdot 10^{-5}$.

Por lo que la probabilidad de suspender es $1 - 2{,}2453 \cdot 10^{-5} = 0{,}99998$

La probabilidad de sacar sobresaliente es:

P (X $\geq$ 16) = P (X = 16) + P (X = 17) + P (X = 18) = $6{,}609 \cdot 10^{-10}$

5. Un inversor dispone de 10 000€ para colocar en fondos de inversión. En la siguiente tabla aparece el tanto por ciento de renta que se obtiene con esos fondos de inversión y sus respectivas probabilidades:

% Renta	5	7	9	11
Probabilidad	0,1	0,4	0,3	0,2

Si decide invertir todo su dinero en estos fondos de inversión ¿qué rentabilidad cabe esperar que obtenga?

El tanto por ciento que cabe esperar que obtendrá es $\mu = 5 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}2 = 8{,}2\%$

Por tanto si invierte 10 000 € recibirá 820 € de rentabilidad.

6. En las competiciones de saltos de altura los atletas tienen tres oportunidades para superar cada una de las alturas a la que se coloca el listón. Tras observar y anotar los saltos de un atleta a lo largo de la temporada para alturas inferiores a 2,20 m obtuvieron los siguientes resultados:

Saltos nulos	0	1	2	3
Nº de alturas	114	100	70	16

Ajusta estos datos a una distribución binomial. ¿Se puede considerar bueno el ajuste realizado?

Calculamos la media de los datos: $\bar{x} = \dfrac{288}{300} = 0{,}96$.

La media de la distribución binomial es $\mu = np = 3p$. Hacemos coincidir las dos medias, y calculamos las probabilidades p y q: $3p = 0{,}96 \Rightarrow p = 0{,}32$ y $q = 0{,}68$

Comparamos la distribución estadística con la distribución binomial B (3; 0,32). En la tabla aparecen todos los cálculos.

Las

x_i	$P_i = P(X = x_i)$	$300 \cdot P_i$	Valores teóricos	Valores observados	Diferencias
0	$0{,}68^3 = 0{,}3144$	94,32	94	114	20
1	$3 \cdot 0{,}32 \cdot 0{,}68^2 = 0{,}4439$	133,17	133	100	33
2	$3 \cdot 0{,}32^2 \cdot 0{,}68 = 0{,}2089$	62,67	63	70	7
3	$0{,}32^3 = 0{,}0328$	9,84	10	16	6

diferencias son muy grandes. Podemos afirmar que el ajuste no es bueno, es decir, los datos iniciales no provenían de una distribución binomial.

7. El modelo mecánico cuántico que utiliza la Física para describir el átomo define *orbital* como la región del espacio en la que hay una probabilidad máxima (99%) de encontrar al electrón. Si los orbitales de tipo P pueden alojar seis electrones, ¿cuál es la probabilidad de que al menos cinco electrones se encuentren dentro del orbital en un instante dado?

La variable aleatoria X, número de electrones en el orbital sigue una distribución binomial B (6; 0,99).

La probabilidad pedida es:

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}9985$$

8. ¿Qué es más probable, obtener al menos una vez un 6 lanzando un dado 6 veces o al menos un 6 doble al lanzar dos dados 6 veces?

La variable aleatoria X, número de seises obtenidos al lanzar una dado, sigue una distribución binomial $B\left(6 ; \frac{1}{6}\right)$.

La probabilidad de obtener al menos un seis lanzando seis veces el dado es:

$$P(X \geq 1) = 1 - [P(X = 0)] = 0{,}6651$$

En este segundo caso la variable aleatoria X sigue una distribución binomial $B\left(6 ; \frac{1}{36}\right)$.

La probabilidad de obtener al menos un seis doble al lanzar dos dados seis veces es:

$$P(X \geq 1) = 1 - [P(X = 0)] = 0{,}1555$$

Por lo que la probabilidad es mayor en el primer caso.

9. En una población el 75% de las personas tienen teléfono móvil. Elegidas 20 personas al azar halla:

a) La probabilidad de que como máximo 19 tengan teléfono móvil.

b) Sabiendo que como máximo 19 tienen teléfono móvil, halla la probabilidad de que como mínimo 3 no tienen teléfono móvil.

La variable aleatoria X, número de personas con teléfono móvil sigue una distribución binomial B (20; 0,75).

a) La probabilidad de que como máximo 19 tengan teléfono móvil es:

$$P(X \leq 19) = 1 - [P(X = 20)] = 0{,}9968$$

b) En este caso es una probabilidad condicionada

P (mínimo 3 no tienen teléfono móvil / máximo 19 tienen teléfono móvil) =

$$\frac{P(X \leq 16 \ \cap X \leq 19)}{P(X \leq 19)} = \frac{P(X \leq 16)}{P(X \leq 19)} = \frac{0{,}7748}{0{,}9968} = 0{,}7773$$

10. Un corredor de fórmula 1 tiene probabilidad 0,4 de conseguir subir al podio. ¿En cuántas carreras debe participar para que la probabilidad de subir al podio al menos una vez sea mayor de 0,7?

La variable aleatoria, número de carreras que participa, sigue una binomial B (a; 0,4).

Aplicando las condiciones del enunciado obtenemos:

$$P(X \geq 1) = 1 - [P(X = 0)] > 0{,}7$$

Por tanto, $0{,}3 > 0{,}6^a$; de modo que a > 2 carreras, es decir en 3 carreras por lo menos.

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN-PÁG. 403

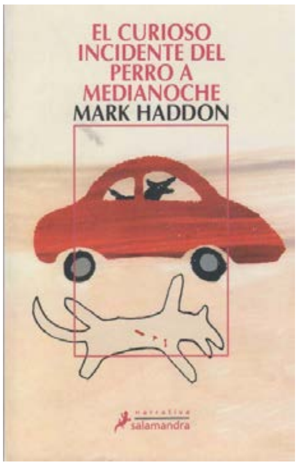
Matemáticas y literatura

En los últimos años han aparecido novelas relacionadas con las matemáticas. Un ejemplo de ello es *El curioso incidente del perro a medianoche*. Sobre ella podemos realizar una investigación matemática. A continuación proponemos unas posibles pautas a seguir.

Antes de entrar en los aspectos matemáticos que presenta, podemos trabajar cuestiones como: información bibliográfica, el autor, análisis de la obra: tema, argumento, personajes, tiempo, espacio, estructura, lengua y estilo. Un tema para profundizar podría ser la enfermedad que sufre el protagonista.

Enumeramos los temas matemáticos que aparecen en el libro:

• Aritmética: número primos, potencias de dos y de tres, fórmula que proporciona el número de números primos menor que un número dado, ternas pitagóricas.



• Álgebra: ecuaciones de segundo grado.

• Geometría: la búsqueda y la situación de un lugar en el plano, formas de rellenar o embaldosar el plano, teorema de Pitágoras, direcciones y vectores en el espacio.

• Probabilidad: el problema de Monty Hall, probabilidades y el origen de la vida.

• Lógica: razonamientos encadenados, la navaja de Occam.

• Otros: estrategias en la resolución de problemas (Formulé un plan), el juego de los soldados de Conway y el estudio de las poblaciones de animales, por Robert May y otros, a través de la relación $N_{nueva} = \lambda \cdot N_{vieja} \cdot (1 - N_{vieja})$.