Opción A

Ejercicio 1.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ **y** $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**, se pide**

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real "a".

b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso a=0.

a) De la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$, intentamos tomar, de forma arbitraria, un menor complementario de orden 2, no nulo:

$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ por lo que el rango de la matriz es al menos 2: $Rango(A) \geq 2$

Tomamos ahora un menor de orden 3 y lo igualamos a cero: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Estudiemos la matriz para ambos casos:

$\boxed{\text{Para a=1}}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Sin necesidad de calcular menores complementarios, como las columnas 1ª y 4ª son iguales y la colmena 3ª es combinación lineal de la 2ª y la 4ª

$C_1 = C_4$ $C_2 + C_4 = C_3$ Entonces $\boxed{Rango(A) = 2}$

$\boxed{\text{Para a=-2}}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Sin necesidad de calcular menores complementarios, como las filas 2ª y 4ª son proporcionales: $F_2 = -F_3$, entonces $\boxed{Rango(A) = 2}$

$\boxed{\text{Para a≠1 y a≠-2}}$

Hay al menos un menor complementario de orden tres, calculado más arriba, no nulo. Por tanto, $\boxed{Rango(A) = 3}$

b) Calculamos A·M para a= 0 y el valor del determinante:

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A \cdot M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Por tanto, A·M tiene inversa. Hallamos la matriz adjunta, que es aquella en la que cada elemento se sustituye por su adjunto.

$$(AM)^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Transponiendo y dividiendo por el determinante, sacamos la inversa

$$(AM)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Dada $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, definida para $x>0$, se pide:

a) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$

b) Encontrar un punto de la curva $y=f(x)$ en que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es extremo relativo.

c) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$ y $x=e$

a) Asíntota horizontal $y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=L'H\hat{o}pital=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ $\boxed{y=0}$

b) La recta tangente será de la forma $y=mx+n$ donde m es la pendiente. Si la recta es horizontal entonces $m=f'(a)=0$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Si $m=0\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0\Rightarrow 1=\ln(x)\Longrightarrow x=e$

Sustituyendo en la función dada, el punto pedido es $\left(e,\frac{1}{e}\right)$

Para que este punto sea extremo relativo necesitamos la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln(x))2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}$$

$$f''(e)=\frac{-3+2\ln(e)}{e^3}=\frac{-3+2}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0\Rightarrow Es\ un\ máximo$$

Ejercicio 3.

Dadas la recta $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=z$ y la recta s que pasa por el punto (2,-5,1) y tiene dirección (-1,0,-1), se pide:

a) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

a) Al ser ambos vectores directores no proporcionales, entonces las rectas o se cortan o se cruzan. Coloquemos ambas rectas como intersección de planos y resolvamos el sistema que resulta.

$$r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=z \qquad s\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y+5}{0}=\frac{z-1}{-1} \qquad \left.\begin{array}{c}\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}\\ \frac{x-1}{2}=z\\ y=-5\\ x-2=z-1\end{array}\right\}\Rightarrow Sistema\ incompatible. No\ hay\ solución. Las\ rectas\ se\ cruzan.$$

b) Un plano paralelo a r y que contenga a s, es un plano con los vectores directores de ambas rectas y cualquier punto de s.

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+5 & z-1\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow 2x+3y+2z+9=0$$

c) Un plano perpendicular a r debe tener como vector característico o normal al propio vector director de r.

$$2x-2y+z+C=0$$

Si obligamos a que pase por el origen de coordenadas: $2\cdot 0-2\cdot 0+0+C=0\Longrightarrow C=0$

Luego el plano pedido es

$$2x-2y+z=0$$

Ejercicio 4.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es el 10%. Se pide:

a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos 5 años.

b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

a) Tenemos una distribución discreta binomial con n=10 elementos, p=0,1 como probabilidad de éxito y q=0,9 como probabilidad de fracaso. No podemos aproximarla a una normal porque no cumple una de las condiciones (np=1<3). Nuestra distribución es B(10;0,1).

Nos piden $P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - P(x = 0) - P(x = 1) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{10} - \binom{10}{1} 0{,}1^1 0{,}9^9 = 1 - 0{,}3487 - 0{,}3874 = 0{,}2639$

b) En este caso $np = 200 \cdot 0{,}1 = 20 > 3$ y también $nq = 200 \cdot 0{,}9 = 180 > 3$ por tanto podemos aproximar a una variable normal con media y desviación típica:

$\mu = 200 \cdot 0{,}1 = 20$ $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 4{,}2426$ X: N(20; 4,2426)

Nos piden $P(x \geq 10)$ pero al pasar la binomial a normal debemos recurrir a tomar intervalos de tamaño una unidad que contengan los valores de x. Por tanto, en realidad lo que nos piden es $P(x > 9{,}5)$

Tipificamos $P(x > 9{,}5) = P\left(z > \frac{9{,}5-20}{4{,}2426}\right) = P(z > -2{,}4748) = P(z < 2{,}4748) = 0{,}9933$

Opción B

Ejercicio 1.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros.

Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.

Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40% respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Definiremos nuestras incógnitas de la siguiente forma:

b = Precio del bocadillo

r = Precio del refresco

p = Precio de la bolsa de patatas

Como le devuelven 4 euros está claro que lo consumido tenía un coste de 19 – 4 = 15 euros. Por tanto,

$$3b + 2r + 2p = 15$$

Y está claro que esos 4 euros corresponden a un bocadillo y una bolsa de patatas.

$$b + p = 4$$

La rebaja del 40% del bocadillo y del refresco la expresamos así:

$$(1 - 0{,}4)(b + r) = 3$$

Simplificando, conformamos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} 3b + 2r + 2p = 15 \\ b + p = 4 \\ b + r = 5 \end{array}\right\}$$

El sistema dado es equivalente a la siguiente matriz:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Al comprobar que hay menores complementarios de orden 2 no nulos, pasamos a calcular el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 0 - 3 - 0 = 1$$

Como el determinante de A no es nulo: $|A| \neq 0 \Longrightarrow rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº\ incógnitas$

Por tanto el sistema es compatible y determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 + 10 + 8 - 0 - 15 - 0 = 3$$ 3 euros cada bocadillo

$$r = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0 + 15 + 10 - 8 - 15 - 0 = 2$$ 2 euros cada refresco

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 15 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{1} = 0 + 8 + 15 - 0 - 12 - 10 = 1$$ 1 euro cada bolsa de patatas

Ejercicio 2.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) Determinar su dominio.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

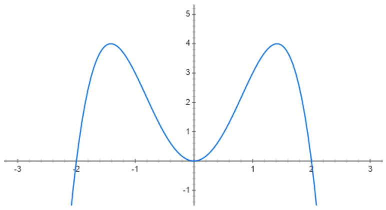
c) Calcular los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

Nota: Utilizaré, en todo el ejercicio, la rama positiva de la función $\boldsymbol{f(x) = \pm\sqrt{4x^2 - x^4}}$

a) Dado que la función es una raíz de índice par sobre un polinomio, nos limitaremos a discernir para qué valores de x el radicando es positivo o nulo.

$4x^2 - x^4 = 0 \qquad x = 0 \qquad 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

El polinomio del radicando es negativo en $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ y positivo o nulo en el resto



Por tanto el dominio viene definido por el siguiente intervalo cerrado: $Dom(f) = [-2,2]$

b) Calculamos la primera derivada de la función

$$f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = \frac{4x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

Una función es creciente cuando su derivada es positiva. Es decreciente, cuando su derivada es negativa y puede tener extremo relativo si su derivada es cero.

$$4x - 2x^3 = 0 \Rightarrow x = 0; \pm\sqrt{2}$$

		$[-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2]$
Numerador	$4x - 2x^3$	+	-	+	-
Denominador	$+\sqrt{4x^2 - x^4}$	+	+	+	+
		+	-	+	-
		Creciente	Decreciente	Creciente	Decreciente

c)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{4 - x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{4 - x^2} = 2$$

Ejercicio 3.

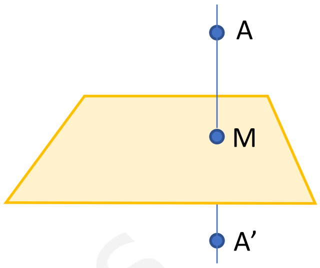
Dados el punto A(2,1,0) y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Determinamos la recta que une el punto a con el plano, perpendicularmente. Para ello utilizaremos como vector director de la recta el vector característico del plano (2,3,4) y evidentemente el punto A(2,1,0):



$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x - z - 4 = 0 \\ 4y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$$

El punto M que es el más próximo a A lo calculamos como la intersección de la recta y el plano. Resolvemos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{matrix} 2x - z - 4 = 0 \\ 4y - 3z - 4 = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 36 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{matrix} \quad \boxed{M=(4,4,4)}$$

La distancia entre A y el plano es el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = (4-2, 4-1, 4-0) = (2,3,4)$$

$$\boxed{d(A,\pi) = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}}$$

El punto simétrico A' tendrá como coordenadas, las componentes del vector $\overrightarrow{OA'}$

$$\boxed{\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = (2,1,0) + 2(2,3,4) = (6,7,8)}$$

Ejercicio 4.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos.

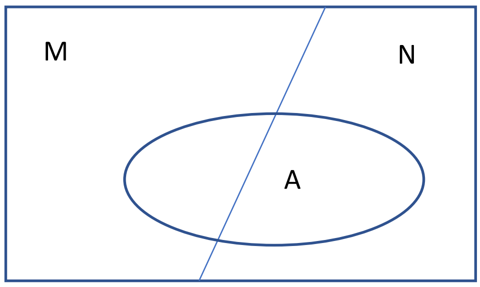
Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Definimos tres sucesos:

- Suceso M = "El enfermo es tratado con medicamento"
- Suceso N = "El enfermo es tratado con placebo"
- Suceso A = "El enfermo mejora"



Nos basaremos en la partición del gráfico de la derecha.

$P(M) = 0{,}5 \qquad P(A/M) = 0{,}8$

$P(N) = 0{,}5 \qquad P(A/N) = 0{,}1$

a) Este apartado se realiza aplicando el Teorema de la probabilidad total

La probabilidad de que mejore es la probabilidad de que haya tomado medicamento o haya tomado placebo.

$$P(A) = P(M \cap A) + P(N \cap A)$$

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A/M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \Rightarrow P(A \cap M) = P(A/M)P(M)$$

Por tanto:

$$P(A) = P(A \cap M) + P(A \cap N) = P(A/M)P(M) + P(A/N)P(N) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$$

b) En este apartado, se da por mejorado el paciente y se pregunta por la probabilidad de la causa. El teorema de Bayes trata la relación causa-efecto en los fenómenos probabilísticos.

$$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{P(A/M)P(M)}{P(A)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}45} = \frac{0{,}4}{0{,}45} = 0{,}89$$