Galicia. Examen EBAU resuelto de Matemáticas II. Julio 2019

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Despeja X en la ecuación $XA + B = C$, sabiendo que A es una matriz invertible.

b) Calcula X tal que $XA + B = C$ si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Dejamos sola la matriz X de un lado y el resto lo pasamos al segundo miembro:

$$X \cdot A + B = C \quad \Rightarrow \quad X \cdot A = C - B$$

Multiplicamos por la matriz inversa de A en los dos miembros, por el lado derecho, que es el lado por donde la matriz que q no tiene ninguna otra matriz:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - B) \cdot A^{-1}$$

Como el producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz identidad, tenemos despejado X:

$$X \cdot I = (C - B) \cdot A^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = (C - B) \cdot A^{-1}}$$

b) Para calcular la matriz pedida tenemos que hacer los cálculos indicados en la solución del apartado anterior. Empezamo matrices:

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow C - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos a hora la inversa de esta matriz, por ejemplo, por adjuntos. Empezamos calculando el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$Adj\ (A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 4 & (-1)^{1+2} \cdot 3 \\ (-1)^{2+1} \cdot 1 & (-1)^{2+2} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la traspuesta intercambiando filas por columnas:

$$[Adj\ (A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa sería:

$$(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj\ (A)]^t = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Por último, multiplicamos la matriz inversa por la matriz A:

$$X = (C - B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 7 & -3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -7/5 & 3/5 \\ 7/5 & -3/5 \\ 7/5 & -3/5 \end{pmatrix}}$$

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

b) Considérese un triángulo tal que: dos de sus vértices son el origen O(0,0) y el punto P(1,3), uno de sus lados está sobre el e la tangente en P(1,3) a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$. Se pide calcular las coordenadas del tercer vértice, dibu calcular, por separado, el área de las dos regiones en las que el triángulo queda dividido por la parábola $y = 4 - x^2$.

a) Lo primero es calcular el dominio de definición de la función. Como tenemos un logaritmo y estos sólo se pueden calc positivos, será:

$$Dom\, f(x) = (0, \infty)$$

Necesitamos la derivada de la función:

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x \cdot (2 \cdot \ln x + 1)$$

Igualamos a cero para obtener los puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (2 \cdot \ln x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2 \cdot \ln x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \ln x = -1/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = e^{-1/2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

El cero no está en el dominio de la función. Con el otro valor hacemos intervalos y vemos el signo que toma la primera deriva

	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$
x	$+$	$+$
$2 \cdot \ln x + 1$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$

Escribimos los intervalos de crecimiento y decrecimiento, sabiendo que la función crece cuando la primera derivada es p cuando es negativa:

$$\boldsymbol{f(x)\ \ decrece\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}$$

$$\boldsymbol{f(x)\ \ crece\ \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)}$$

Como antes del punto crítico la función decrece y a partir de él crece, habrá un mínimo. Calculamos la coordenada Y del punt

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

$$\boldsymbol{Mínimo\ relativo\ en \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e}\right)}$$

b) Empezamos calculando la ecuación de la recta tangente a la parábola, para eso necesitamos la primera derivada:

$$y' = -2x$$

La pendiente nos la da la derivada de la función en la abscisa del punto de tangencia, es decir, en este caso:

$$y'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

Así entonces, tenemos el punto de tangencia (1,3) y la pendiente $y'(1) = -2$. Con lo que utilizando la ecuación punto-pend recta tangente a la parábola:

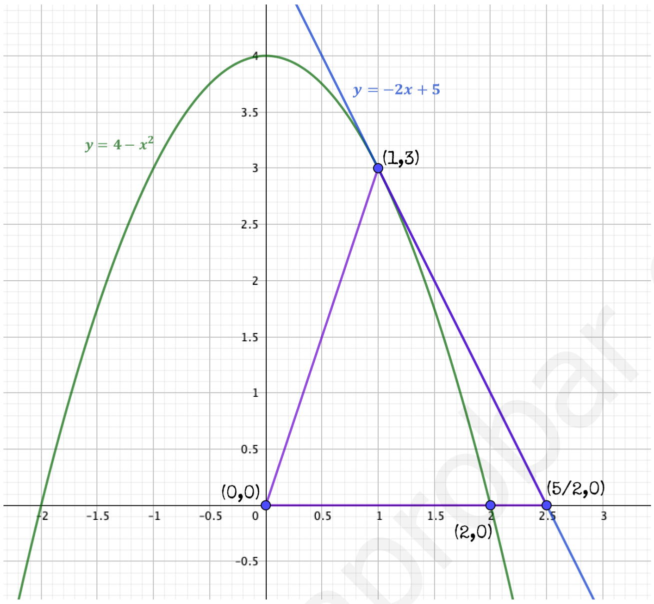
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \quad \textit{siendo } (a, f(a)) \textit{ el punto de tangencia}$$

$$y - 3 = -2 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y = -2x + 5}$$

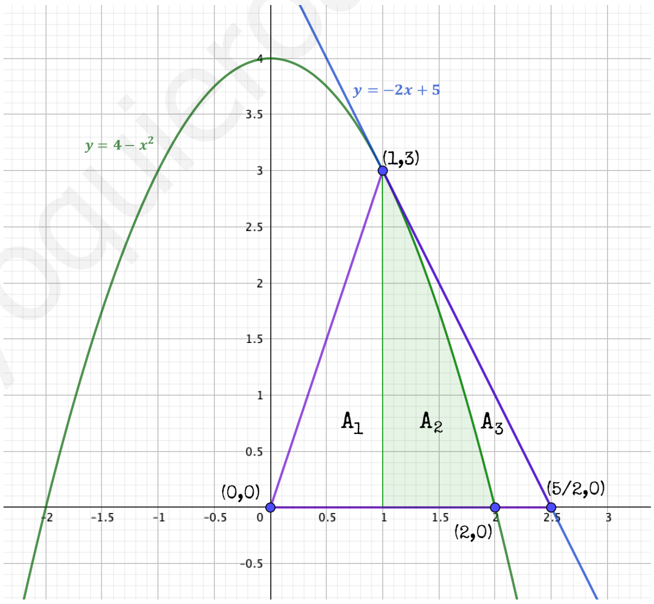
El tercer vértice del triángulo es el punto de corte de esta recta con el eje X:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = \ \ 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -2x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

Hacemos un dibujo con todos los datos:



Primero calculamos el área A_1, que es un triángulo rectángulo:



$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{3}{2} \ u^2$$

Ahora calculamos A_2 que es el área que encierra la parábola con el eje OX entre los puntos 1 y 2:

$$A_2 = \int_1^2 (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4 \cdot 1 - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{5}{3} \ u^2$$

Por lo tanto, el área del triángulo que queda a la izquierda de la parábola será:

$$A_1 + A_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A_1 + A_2 = \frac{19}{6} \ u^2}$$

Para calcular la otra área, calculamos primero el área total del triángulo:

$$A_{Total} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 3}{2} \quad \Rightarrow \quad A_{Total} = \frac{15}{4} \ u^2$$

Por último, el área del triángulo que queda a la derecha de la parábola será:

$$A_3 = A_{Total} - (A_1 + A_2) = \frac{15}{4} - \frac{19}{6} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A_3 = \frac{7}{12} \ u^2}$$

3. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: x + my + z + 2 = 0$ y $\pi_2: mx + y + z + m = 0$ en función de m.

b) Calcular el valor que debe tomar k y m para que los puntos $A(0, k, 1)$, $B(-1, 2, 1)$ y $C(8, 1, m)$ estén alineados.

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2, 1)$ y $Q(8, 1, 1)$ y la ecuación im perpendicular a r que pasa por el punto $R(1, 1, 1)$.

a) Hacemos dos matrices, una con los coeficientes de los planos y otra, ampliada, con los coeficientes y los términos independie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 \Rightarrow 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

- Si $\boldsymbol{m = 1} \Rightarrow rango\ A = 1$, ya que todos los determinantes de orden 2 son cero. Sin embargo, el $rango\ A^* = 2$, por algún determinante de este orden distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

En este caso **los planos serán paralelos**.

- Si $\boldsymbol{m = -1} \Rightarrow rango\ A = 2 = rango\ A^*$. Encontramos algún determinante de este orden en cualquiera de las dos de cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

En este caso **los planos son secantes**.

- Si $\boldsymbol{m \neq \pm 1} \Rightarrow rango\ A = 2 = rango\ A^* \Rightarrow$ **planos secantes**.

b) Vamos a hacer dos vectores con los puntos:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2 - k, 0) \quad ; \quad \overrightarrow{BC} = (9, -1, m - 1)$$

Si los puntos están alineados, los vectores formados con ellos deberán estar en la misma dirección, es decir, deberán ser dep tanto, el rango de la matriz formada por estos vectores tendrá que ser 1:

$$rango \begin{pmatrix} -1 & 2 - k & 0 \\ 9 & -1 & m - 1 \end{pmatrix} = 1$$

Así entonces todos los determinantes de orden 2 deben ser cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 - k \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - 9(2 - k) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k = \frac{17}{9}}$$

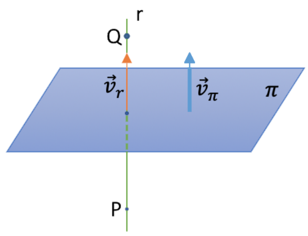
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 9 & m - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -m + 1 - 0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{m = 1}$$

c) Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{PQ} = (9, -1, 0)$$

Con uno de los puntos y con el vector tenemos determinada la recta que nos piden:

$$r: \begin{cases} P(-1,2,1) \\ \overrightarrow{PQ} = (9, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{r: \begin{cases} x = -1 + 9\lambda \\ y = \ \ 2 - \ \lambda \\ z = \ \ 1 \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}}$$



Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de esta es el vector normal de aquel:

Teniendo el vector normal y un punto del plano, podemos determinarlo:

$$\pi: \begin{cases} R(1,1,1) \\ \vec{v}_\pi = (9, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{v}_\pi = (9, -1, 0) \Rightarrow 9 \cdot x - 1 \cdot y + 0 \cdot z + D = 0$$

$$R(1,1,1) \Rightarrow 9 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

$$\boldsymbol{\pi: 9x - y - 8 = 0}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) La probabilidad de que un chico recuerde regar su rosal durante una cierta semana es de 2/3. Si se riega, el ros probabilidad 0,7; si no, lo hace con probabilidad 0,2. Al finalizar la semana el rosal ha sobrevivido. ¿Cuál es la probabilida no lo haya regado?

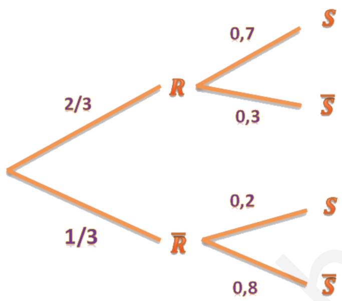
b) Una fábrica produce piezas cuyo grosor sigue una distribución normal de media 8 cm y desviación típica 0,0 probabilidad de que una pieza tenga un grosor comprendido entre 7,98 y 8,021 cm.

a) Definimos los siguientes sucesos y sus probabilidades:

R = "recordar regar un rosal"

S = "que un rosal sobreviva"

Utilizamos un diagrama de árbol para ordenar todos los datos que nos dice el enunciado:



Primero vamos a calcular la probabilidad total de que el rosal sobreviva, porque puede hacerlo tanto si se riega como si no:

$$P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S) = P(R) \cdot P(S/R) + P(\bar{R}) \cdot P(S/\bar{R})$$

$$P(S) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}7 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P(S)} = \frac{8}{15}$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada, de que el chico no regara el rosal sabiendo que ha sobrevivido:

$$P(\bar{R}/S) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}2}{\frac{8}{15}}$$

$$P(\bar{R}/S) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

La probabilidad de que un chico no haya regado el rosal, sabiendo que este sobrevive es de 0,125.

b) Sea X = "grosor de las piezas hechas en una fábrica". $X \sim N(\mu = 8; \sigma = 0{,}01)$

Nos piden calcular la probabilidad siguiente:

$$P(7{,}98 \leq X \leq 8{,}021) = P\left(\frac{7{,}98 - 8}{0{,}01} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{8{,}021 - 8}{0{,}01}\right) = P(-2{,}0 \leq Z \leq 2{,}1) =$$

$$= P(Z \leq 2{,}1) - P(Z \leq -2{,}0) = P(Z \leq 2{,}1) - P[1 - P(Z \leq 2{,}0)] =$$

$$= P(Z \leq 2{,}1) - 1 + P(Z \leq 2{,}0) = 0{,}9821 - 1 + 0{,}9772$$

$$P(7{,}98 \leq X \leq 8{,}021) = 0{,}9593$$

La probabilidad de que el grosor de las piezas de una fábrica se encuentren entre 7,98 y 8,021 cm es de 0,9593.

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - \quad y + \quad 3z = m \\ \quad my - \quad 2z = -2 \\ x + (m-1)y + (m+3)z = m \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 2$.

a) Planteamos dos matrices, la de coeficientes (A) y la ampliada con los términos independientes (A^*):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & m \\ 0 & m & -2 & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 & m \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz A para determinar su rango. I:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m-1 & m+3 \end{vmatrix} = m^2 + 2m$$

Igualamos a cero el determinante para saber qué valores de *m* lo anulan:

$$m^2 + 2m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = -2 \\ m = \quad 0 \end{cases}$$

El rango de la matriz A será:

- Si $m \neq -2,0 \quad \Rightarrow \quad rang\ (A) = 3$.
- Si $m = -2 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2$, ya que encontramos algún determinante de este orden distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \neq 0$$

- Si $m = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2$, ya que encontramos algún determinante de este orden distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$$

Los casos que tenemos entonces serían los siguientes:

- **Si $m \neq -2,0 \quad \Rightarrow \quad rang\ (A) = 3 = rang(A^*) = nº\ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.D.$**

  El rango de la matriz ampliada es 3, porque el determinante de A, que era distinto de cero, también está en la matriz amplia

- **Si $m = -2 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \quad \Rightarrow \quad S.I.$**
  El rango de la matriz ampliada es 3 porque hay algún determinante de este orden distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

- **Si $m = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2 = rang(A^*) < nº\ incógnicas = 3 \quad \Rightarrow \quad S.C.I.$**
  El rango de la matriz ampliada es 2, porque todos los determinantes de orden 3 son cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) Para el caso de m = 0, el sistema es compatible indeterminad. En este caso la primera ecuación y la tercera son iguales, po eliminar una de ellas:

$$\begin{cases} x - y + 3z = \quad 0 \\ \quad -2z = -2 \\ x - y + 3z = \quad 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y + 3z = \quad 0 \\ \quad -2z = -2 \end{cases}$$

Ahora ponemos una incógnita como parámetro, por ejemplo, $y = \lambda$ y resolvemos:

$$\begin{cases} x - \lambda + 3z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \cdot 1 + \lambda \quad \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = -3 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = \quad \lambda} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \\ \boldsymbol{z = \quad 1} \end{cases}$$

Para el caso de m = 2, el sistema es compatible determinado, por lo que tendrá una única solución. La calculamos por Cramer

$$\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -2 \\ x + y + 5z = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = 0 \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2} \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

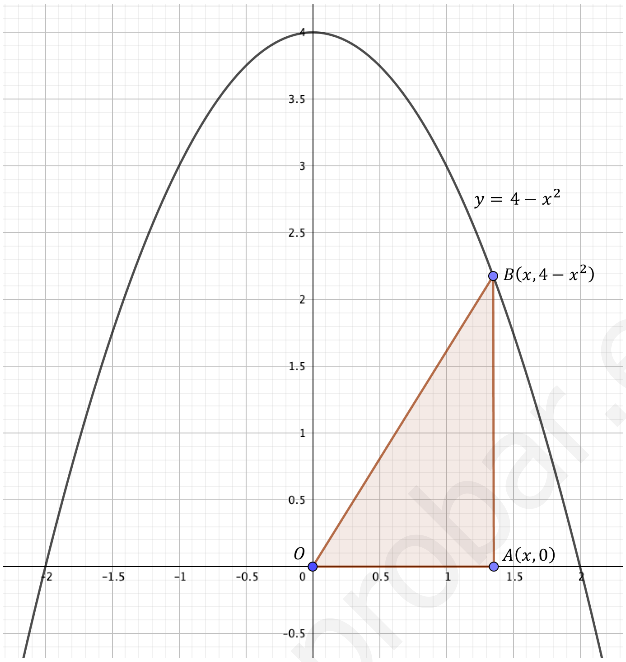
Para este caso, m = 2, la solución del sistema es $(x, y, z) = (0, -1/2,\ 1/2)$.

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer c uadrante que tienen un vértice en el orig parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya áre

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

a) Primero hacemos una gráfica, en la que dibujamos uno de los muchos triángulos rectángulos que podrían dibujarse:



El punto A está sobre el eje OX, por lo que su segunda coordenada será cero y el punto B tendrá la primera coordenada i segunda podremos relacionarla con la primera con la ecuación de la parábola. Esto nos permite poner el área del triángulo e una variable:

$$A(x.y) = \frac{x \cdot y}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{x \cdot (4 - x^2)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (4x - x^3)$$

Para estudiar los máximos y mínimos de la función necesitamos la primera derivada:

$$A'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 - 3x^2)$$

Igualamos a cero y obtenemos los puntos críticos de la función:

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot (4 - 3x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El valor negativo no nos vale, porque nos dicen que el triángulo está en el primer cuadrante. Comprobamos si el otro valo mínimo. Lo hacemos en la segunda derivada:

$$A''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-6x) = -3x$$

$$A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = -2\sqrt{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \textit{máximo}$$

Obtenemos la medida de los catetos y por Pitágoras la de la hipotenusa:

$$\boldsymbol{\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \ u} \ ; \ \overline{AB} = 4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4 - \frac{4 \cdot 3}{9} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\overline{AB} = \frac{8}{3} \ u}$$

$$h^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{76}{9}}$$

$$\boldsymbol{\overline{OB} = \frac{2\sqrt{19}}{3} \ u}$$

b) **Teorema de Bolzano**:

Sea *f* una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y toma valores de signo contrario en los extremos ($f(a) \cdot f(b) < 0$ al menos un c ∈ (a,b) tal que f(c) = 0.

Teorema de Rolle:

Sea f(x) una función continua en [a,b], derivable en (a,b) y con f(a) = f(b), entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que f

3. Se pide:

a) Para el plano $\pi: 3x+2y-z=0$ y la recta $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$, calcular el punto de corte de r con π y obtener la ecua plano π' que es perpendicular a π y contiene a r.

b) Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x-5y-4z-9=0$ y $\pi_2: x=0$, y calcular el ángulo $\alpha \in [0^0, 90^0]$ que

a) Antes de nada, vamos a poner la recta r en las ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} P(2,-1,0) \\ \overrightarrow{PQ}=(1,-2,3) \end{cases} \Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para calcular la posición relativa de la recta y el plano, sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación im resolvemos:

$$3(2+\lambda)+2(-1-2\lambda)-(3\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=1$$

Para calcular el punto de corte solo tenemos que sustituir el valor del parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = 2+1 \\ y=-1-2\cdot 1 \\ z = 3\cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y=-3 \\ z = 3 \end{cases}$$

El punto de intersección será el $(3,-3,3)$.

Para determinar el plano que nos piden necesitamos un punto y dos vectores que le den dirección. El punto podemos obten puesto que esta recta debe estar contenida en el plano. Uno de los vectores será igualmente el vector director de la recta y normal del otro plano, ya que, al ser perpendicular a él, estará contenido en el nuevo plano:

$$\pi': \begin{cases} P(2,-1,0) \\ \vec{v}_r=(1,-2,3) \\ \vec{v}_\pi=(3,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \quad \pi': \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\pi': -4x+10y+8z+18=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi': 2x-5y-4z-9=0}$$

Observamos que este plano obtenido, si lo simplificamos, se obtiene el que nos dan en el apartado siguiente.

b) Los vectores normales de cada uno de los planos son:

$$\vec{v}_{\pi_1}=(2,-5,-4) \quad ; \quad \vec{v}_{\pi_2}=(1,0,0)$$

Con los vectores no son proporcionales, los planos no pueden ser ni paralelos ni coincidentes, por lo tanto, son secantes. Calc que forman:

$$\cos(\widehat{\pi_1,\pi_2})=\frac{\left|\vec{v}_{\pi_1}\cdot\vec{v}_{\pi_2}\right|}{\left|\vec{v}_{\pi_1}\right|\cdot\left|\vec{v}_{\pi_2}\right|}=\frac{|(2,-5,-4)\cdot(1,0,0)|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}$$

$$\cos(\widehat{\pi_1,\pi_2})=\frac{|2\cdot 1-5\cdot 0-4\cdot 0|}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{1}}=\frac{2}{\sqrt{45}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$(\widehat{\pi_1,\pi_2})=\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{15}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(\widehat{\pi_1,\pi_2})=72{,}65^0}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,4$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcu $P(A \cap B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$. Razona si A y B son o no sucesos independientes.

b) La probabilidad de que un determinado jugador de fútbol marque un gol desde el punto de penalti es p = 0,7. Si calcula las siguientes tres probabilidades: de que no marque ningún gol; de que marque por lo menos 2 goles; y de que m lanza 2 100 penaltis, calcula la probabilidad de que marque por lo menos 1 450 goles. Se está asumiendo que los lanzamie independientes.

a) Calculamos las probabilidades de los sucesos contrarios de A y de B:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(\bar{A}) = 0,8}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(\bar{B}) = 0,6}$$

A partir de la probabilidad de la unión podemos calcular la de la intersección:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0{,}5 = 0{,}2 + 0{,}4 - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = 0,1}$$

Para calcular la probabilidad que nos falta hacemos uso de una de las leyes de Morgan:

$$P(\bar{A} U \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} U \bar{B}) = 1 - 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(\bar{A} U \bar{B}) = 0,9}$$

Para saber si A y B son sucesos independientes calculamos las probabilidades condicionadas siguientes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25 \neq P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}50 \neq P(B)$$

Vemos que la probabilidad de que ocurran el suceso A depende de si ha sucedido o no el suceso B y viceversa, por lo tanto, **A dependientes**.

b) Sea "X: el número de goles que un determinado jugador es capaz de marcar desde el punto de penalti". $X \sim B(n = 5, p = 0{,}7$

La fórmula de la distribución binomial es:

$$P(X = a) = \binom{n}{a} \cdot p^a \cdot q^{n-a} = \frac{n!}{a! \cdot (n-a)!} \cdot p^a \cdot q^{n-a}$$

Calculamos la probabilidad de que no marque ningún gol:

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}7^0 \cdot (1 - 0{,}7)^{5-0} = \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} \cdot 1 \cdot 0{,}3^5$$

$$\boldsymbol{P(X = 0) = 0,00243}$$

Para calcular la probabilidad de que marque por lo menos dos goles, calculamos el suceso contrario, es decir, que marq goles:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}7^1 \cdot (1 - 0{,}7)^{5-1} = \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4$$

$$P(X = 1) = 0{,}02835$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - (0{,}00243 + 0{,}02835)$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 2) = 0,96922}$$

Calculamos ahora la probabilidad de que marque todos los penaltis que lanza:

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}7^5 \cdot (1 - 0{,}7)^{5-5} = \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^0$$

$$\boldsymbol{P(X=5)=0,16807}$$

Si lanza 2 100 penaltis tendríamos que calcular muchas probabilidades, por eso vamos a comprobar si podemos aproxim binomial por una normal:

$$\begin{cases} n\cdot p = 2\,100\cdot 0'7 = 1\,470 > 5 \\ n\cdot q = 2100\cdot 0'3 = \quad 630 > 5 \end{cases} \Rightarrow \ \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{2\,100\cdot 0'7\cdot 0'3} = 21$$

$$\Rightarrow \ X' \sim N(1\,470\,, 21)$$

Como vemos se puede aproximar a una distribución normal. Ahora calculamos la probabilidad pedida haciendo antes la corre

$$P(X' \geq 1\,450) \cong P(X' > 1\,449'5) = P\left(Z > \frac{1\,449{,}5 - 1\,470}{21}\right) =$$

$$= P(Z > -0{,}98) = P(Z \leq 0{,}98) = 0{,}8365$$

Si lanza 2 100 penaltis, la probabilidad de que marque por lo menos 1 450 goles es de 0,8365.