Página 123

Resuelve

1. Sabiendo que 1 estadio = 185 m, halla en kilómetros el radio de la Tierra que obtuvo *Eratóstenes*. Compáralo con la realidad: 6 371 km.

Si a 1/50 del ángulo total le corresponde un arco de 5 000 estadios, al ángulo total le corresponden $50 \times 5\,000 = 250\,000$ estadios. Esta es la longitud de la circunferencia terrestre. El radio R se obtiene así:

$$2\pi R = 250\,000 \;\rightarrow\; R = \frac{250\,000}{2\pi} = 39\,788{,}7 \text{ estadios} = 7\,360\,916 \text{ m} \approx 7\,361 \text{ km}$$

2. ¿Cuánto mide el lado de la ciudad china?

Llamamos x a la medida, en pasos, del lado del cuadrado (ciudad).

Los catetos del triángulo rectángulo que tiene el ángulo recto en la puerta norte, N, miden $\frac{x}{2}$ y 20 pasos.

Este triángulo es semejante al grande, cuyos catetos miden 1 775 pasos y $20 + x + 14 = x + 34$ pasos.

La semejanza de los dos triángulo permite poner:

$$\frac{\frac{x}{2}}{1775} = \frac{20}{x+34} \;\rightarrow\; \frac{x}{3550} = \frac{20}{x+34} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + 34x - 71\,000 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 + 284\,000}}{2} = \frac{-34 \pm 534}{2}$$

Solo es válida la raíz positiva: $x = 250$ pasos.

1 Semejanza

Página 125

1. Para construir una carpa semiesférica para su maqueta, Gonzalo ha necesitado 402 cm² de tela. Sabiendo que tiene un diámetro de 16 cm, calcula la superficie y el volumen de la carpa en la realidad.

Calculamos en primer lugar el volumen de la carpa, en maqueta:

$$V_{\text{ESFERA MAQUETA}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 = 2\,144{,}60 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CARPA MAQUETA}} = 2\,144{,}60 : 2 = 1\,072{,}30 \text{ cm}^3$$

Por tanto:

$$V_{\text{CARPA REAL}} = V_{\text{CARPA MAQUETA}} \cdot 500^3 = 134\,037\,500\,000 \text{ cm}^3 = 134\,037{,}5 \text{ m}^3$$

$$S_{\text{CARPA REAL}} = S_{\text{CARPA MAQUETA}} \cdot 500^2 = 100\,500\,000 \text{ cm}^2 = 10\,050 \text{ m}^2$$

2. La Estatua de la Libertad de Nueva York mide 30,6 m de los pies a la cabeza. Si con ella se reprodujo a una persona cuya estatura era de 170 cm, ¿qué escala utilizaron para su construcción?

30,6 m = 3 060 cm

3 060 cm de la escultura corresponden a 170 cm en la realidad.

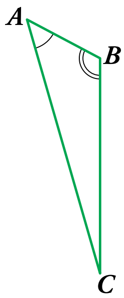
Escala $\rightarrow$ 3 060 : 170 = 18

La escala es 18:1; es decir, 18 cm en la escultura representan 1 cm en la realidad.

2 Semejanza de triángulos

Página 127

1. Estamos en A. Queremos calcular la distancia a un lugar lejano e inaccesible, C. Para eso, señalamos otro punto próximo, B, y medimos: $\overline{AB}$ = 53 m. Medimos también los ángulos $\hat{A}$ = 46° y $\hat{B}$ = 118°.



Ahora dibujamos en nuestro cuaderno un triángulo $A'B'C'$ con las siguientes medidas: $\overline{A'B'}$ = 53 mm, $\hat{A}'$ = 46°, $\hat{B}'$ = 118°.

a) Construye el triángulo $A'B'C'$ en tu cuaderno.

b) Explica por qué $\widehat{A'B'C'}$ es semejante a $\widehat{ABC}$.

c) Mide $\overline{A'C'}$ con la regla.

d) Deduce cuánto mide la distancia buscada, $\overline{AC}$.

a) Se construye el triángulo con las indicaciones dadas.

b) Los triángulos son semejantes porque tienen dos ángulos iguales.

c) $\overline{A'C'}$ mide unos 17 cm.

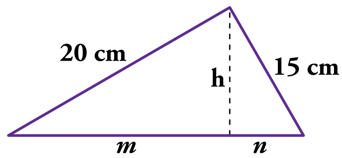
d) Si llamamos $x = \overline{AC}$:

$$\frac{53 \text{ mm}}{53 \text{ m}} = \frac{170 \text{ mm}}{x} \rightarrow x = 170 \text{ m}$$

3 La semejanza en los triángulos rectángulos

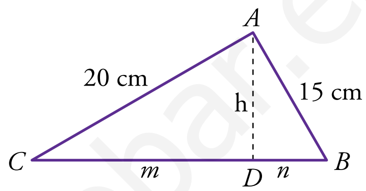
Página 129

1. En este triángulo rectángulo, calcula las longitudes h, *m* y *n*.



En $\widehat{ABC}$ aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(m + n)^2 = 20^2 + 15^2 \rightarrow (m + n)^2 = 625 \rightarrow m + n = 25$



Ahora aplicamos el teorema del cateto.

$$\left.\begin{array}{l} 20^2 = (m + n) \cdot m \\ 15^2 = (m + n) \cdot n \end{array}\right\} \text{ Como } m + n = 25:$$

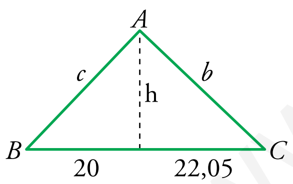
$$20^2 = 25m \rightarrow m = \frac{400}{25} = 16 \text{ cm}$$

$$15^2 = 25n \rightarrow n = \frac{225}{25} = 9 \text{ cm}$$

Por último aplicamos el teorema de la altura:

$h^2 = m \cdot n \rightarrow h^2 = 16 \cdot 9 = 144 \rightarrow h = 12$ cm

2. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 20 cm y 22,05 cm, respectivamente. Calcula las medidas de los catetos y de la altura sobre la hipotenusa.



Aplicamos el teorema del cateto a $\widehat{ABC}$:

$b^2 = (20 + 22{,}05) \cdot 22{,}05 = 927{,}2025 \rightarrow b = 30{,}45$ cm

$c^2 = (20 + 22{,}05) \cdot 20 = 841 \rightarrow c = 29$ cm

Para calcular la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$ utilizamos el teorema de la altura:

$h^2 = 20 \cdot 22{,}05 = 441 \rightarrow h = 21$ cm

4 Aplicaciones de la semejanza de triángulos

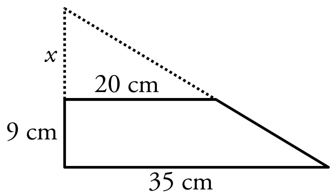
Página 130

1. **Calcula el volumen de un tronco de cono cuya altura es 9 cm y cuyas bases tienen radios de 20 cm y 35 cm.**

a) Hazlo paso a paso, razonadamente.

b) Compruébalo aplicando la fórmula anterior.

a)



$$\frac{x}{20} = \frac{x+9}{35} \rightarrow 35x = 20x + 180 \rightarrow$$

$$\rightarrow 15x = 180 \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

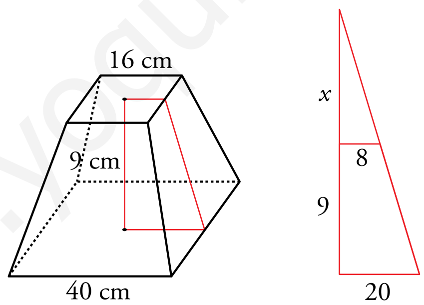
$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 35^2 \cdot (12 + 9) - \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 12 = \frac{1}{3}\pi(25\,725 - 4\,800) = 21\,912{,}61 \text{ cm}^3$$

b) $V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}\pi(35^2 + 35 \cdot 20 + 20^2) \cdot 9 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2\,325 \cdot 9 = 21\,912{,}61 \text{ cm}^3$

2. **Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas bases son cuadrados.**

Lados de los cuadrados: 40 cm y 16 cm

Altura: 9 cm



$$\frac{x+9}{20} = \frac{x}{8} \rightarrow 8x + 72 = 20x \rightarrow 12x = 72 \rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{TRONCO}} = \frac{1}{3}[40^2 \cdot (9 + 6)] - \frac{1}{3}(16^2 \cdot 6) = \frac{1}{3}(24\,000 - 1\,536) = 7\,488 \text{ cm}^3$$

Página 131

3. Un globo sube 643 m sobre la superficie de la Tierra. Averigua qué superficie terrestre se verá desde arriba. Hazlo de dos formas:

a) Razonadamente, utilizando el teorema del cateto.

b) Aplicando la fórmula anterior, para comprobar que la solución es correcta.

c) ¿A qué altura hemos de ascender para ver exactamente el 5 % de la superficie de la Tierra? (Aplica la fórmula).

a) Por el teorema del cateto:

$R^2 = (R - \text{h})(R + d)$ donde: R = radio de la Tierra = 6 371 km

d = 643 m = 0,643 km

$$6\,371^2 = (6\,371 - \text{h})(6\,371 + 0{,}643) \rightarrow \text{h} = \frac{6\,371 \cdot 6\,371{,}643 - 6\,371^2}{6\,371{,}643} = 0{,}643 \text{ km}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 6\,371 \cdot 0{,}643 = 25\,726{,}35 \text{ km}^2$$

b) $$A_{\text{CASQUETE}} = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} = \frac{2\pi \cdot 6\,371^2 \cdot 0{,}643}{6\,371{,}643} \approx 25\,723{,}76 \text{ km}^2$$

c) $S_{\text{TIERRA}} = 4\pi R^2 = 509\,805\,890{,}96 \text{ km}^2$

5 % de $S_{\text{TIERRA}} = 25\,490\,294{,}548 \text{ km}^2$

$$A = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} \rightarrow AR + Ad = 2\pi R^2 d \rightarrow AR = d(2\pi R^2 - A) \rightarrow d = \frac{AR}{2\pi R^2 - A}$$

$$d = \frac{25\,490\,294{,}548 \cdot 6\,371}{2\pi \cdot 6\,371^2 - 25\,490\,294{,}548} = 707{,}9 \text{ km}$$

4. Un cohete se aproxima a la Luna, cuyo diámetro, según sabemos, es de 3 500 km.

a) Averigua qué superficie de Luna se ve desde el cohete cuando se encuentra a 1 000 km de distancia. Hazlo razonadamente y comprueba el resultado aplicando la fórmula.

b) ¿A qué distancia debe estar el cohete para poder asegurar que sus ocupantes pueden ver al 10 % de la superficie de la Luna? (Aplica la fórmula).

a) $$\frac{R}{R + d} = \frac{R - \text{h}}{R} \rightarrow \frac{1750}{2\,750} = \frac{1750 - \text{h}}{1750} \rightarrow \text{h} = \frac{1750^2 - 1750 \cdot 2\,750}{-2\,750} = 636{,}36 \text{ km}$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = 2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 1\,750 \cdot 636{,}36 = 6\,997\,143{,}654 \text{ km}^2$$

$$A_{\text{CASQUETE}} = \frac{2\pi R^2 d}{R + d} = \frac{2\pi \cdot 1750^2 \cdot 1\,000}{2\,750} = 6\,997\,183{,}638 \text{ km}^2$$

b) $S_{\text{LUNA}} = 4\pi R^2 = 38\,484\,510 \text{ km}^2$

10 % de $S_{\text{LUNA}} = 3\,848\,451 \text{ km}^2$

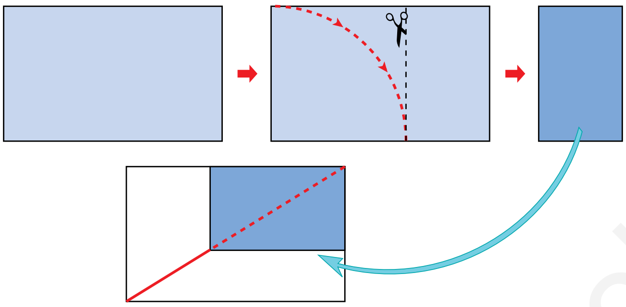
$$d = \frac{S_{\text{LUNA}} \cdot R}{2\pi R^2 - S_{\text{LUNA}}} = \frac{6\,734\,789\,250}{15\,393\,804} = 437{,}5 \text{ km}$$

5 Semejanza de rectángulos. Aplicaciones

Página 133

1. **Si a una hoja A-4 se le corta una tira de 2,5 cm de ancho a lo largo del lado mayor, obtendrás un rectángulo áureo. Constrúyete dos.**

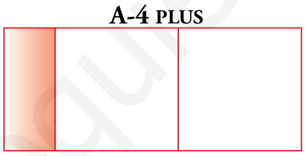
A uno de ellos, córtale un cuadrado. Comprueba que el rectángulo remanente es semejante al rectángulo inicial.



Experiencia práctica.

2. **Si a una hoja A-4 le añadimos un cuadrado, el rectángulo resultante, al que llamaremos A-4 PLUS, tiene la siguiente propiedad: si le quitamos dos cuadrados, el rectángulo remanente es semejante al inicial.**

El rectángulo sombreado es semejante al rectángulo total.



a) Compruébalo con una hoja A-4.

b) Demuéstralo teniendo en cuenta que las dimensiones del A-4 PLUS son $\sqrt{2}+1$ y 1, y las del rectángulo sobrante son 1 y $\sqrt{2}-1$.

a) Experiencia práctica.

b) Debemos comprobar que $\dfrac{\sqrt{2}+1}{1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$.

$$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \sqrt{2}^{\,2} - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Página 134

Hazlo tú. ¿A qué distancia de nuestros ojos debemos poner una bola de 3 cm de diámetro para que al mirar a la Luna la tape completamente?

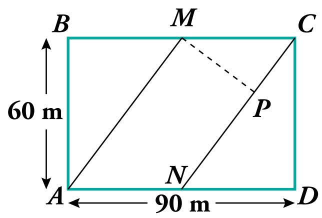
Distancia a la luna = 384 000 km = $3{,}84 \cdot 10^{10}$ cm Diámetro de la bola = 3 cm

Diámetro de la luna = 3 500 km = $3{,}5 \cdot 10^{8}$ cm Distancia a la bola = x cm

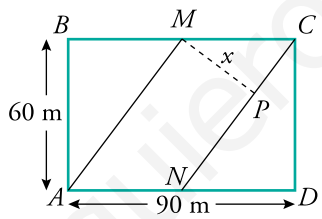
Como la luna y la bola tendrían el mismo tamaño aparente, la razón entre sus distancias a los ojos debe ser igual que la razón entre sus diámetros:

$$\frac{3{,}84 \cdot 10^{10}}{x} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{8}}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 3{,}84 \cdot 10^{10}}{3{,}5 \cdot 10^{8}} = 329 \text{ cm} = 3{,}29 \text{ metros}$$

Hazlo tú. Si M y N son los puntos medios de BC y AD, calcula $\overline{MP}$.



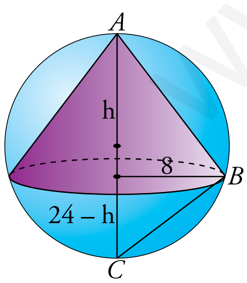
$\widehat{CDN}$ es semejante a $\widehat{MPC}$ por ser rectángulos y ser $\widehat{MCP} = \widehat{CND}$ (alternos internos).



Siendo $x = \overline{MP}$ podemos afirmar que:

$$\frac{x}{60} = \frac{45}{\sqrt{60^2 + 45^2}} \rightarrow \frac{x}{60} = \frac{45}{75} \rightarrow 75x = 2700 \rightarrow x = 36$$

Hazlo tú. En una esfera de diámetro 24 cm se inscribe un cono de radio 8 cm. ¿Cuál será su altura?



$\widehat{ABC}$ es rectángulo en $\widehat{B}$ (ángulo inscrito en una semicircunferencia).

El radio del cono es la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{proyección de } AB \text{ sobre } AC \rightarrow h \\ \text{proyección de } BC \text{ sobre } AC \rightarrow 24 - h \end{array}\right\}$$

Por el teorema de la altura tenemos que:

$$8^2 = h \cdot (24 - h) \rightarrow 64 = 24h - h^2 \rightarrow h^2 - 24h + 64 = 0 = \begin{cases} 12 + 4\sqrt{5} \text{ cm} \\ 12 - 4\sqrt{5} \text{ cm} \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas, es decir, existen dos conos que cumplen las condiciones.

Ejercicios y problemas

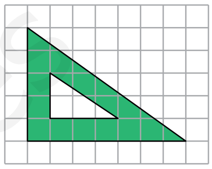
Página 135

Practica

Razón de semejanza. Escalas

1. **a) ¿Son semejantes los triángulos interior y exterior?**

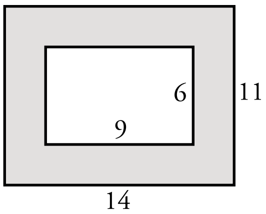
b) ¿Cuántas unidades medirán los catetos de un triángulo semejante al menor cuya razón de semejanza sea 2,5?



a) No. La razón entre los catetos es $\frac{2}{3}$ en el interior y $\frac{5}{7}$ en el exterior.

b) $\left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2,5 = 5 \\ 3 \cdot 2,5 = 7,5 \end{array}\right\}$ Los catetos medirán 5 y 7,5 unidades.

2. **Una fotografía de 9 cm de ancha y 6 cm de alta tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.**

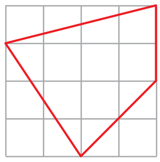


$\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6} \rightarrow$ No son semejantes.

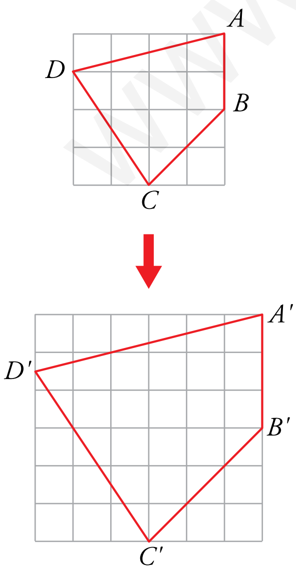
3. **Queremos reproducir la figura adjunta a escala 3/2.**

a) Haz un dibujo de la figura ampliada.

b) Calcula la longitud de sus lados.



a)



b) $\overline{A'B'} = 3$

$\overline{B'C'} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$\overline{A'D'} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{17}$

$\overline{D'C'} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

Se observa que, en todos los casos:

Longitud lado ampliado = $\frac{3}{2}$ · Longitud lado original

puesto que:

$\overline{AB} = 2$ $\qquad$ $\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AD} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ $\qquad$ $\overline{DC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

4. **En un mapa cuya escala es 1:1 500 000, la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm.**

a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?

b) ¿Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades A y B cuya distancia real es 360 km?

a) $\left.\begin{array}{l} 1 \;\rightarrow\; 1\,500\,000 \\ 2{,}5 \;\rightarrow\; x \end{array}\right\}\; x = 2{,}5 \cdot 1\,500\,000 = 3\,750\,000 \text{ cm} = 37{,}5 \text{ km}$

b) $\left.\begin{array}{l} 1\,500\,000 \;\rightarrow\; 1 \\ 36\,000\,000 \;\rightarrow\; x \end{array}\right\}\; x = \dfrac{36\,000\,000}{1\,500\,000} = 24 \text{ cm}$

5. **Indica, en cada caso, cuál es la escala del plano:**

a) 1 mm del plano representa 10 m reales.

b) 50 km reales se representan por 1 dm en el plano.

c) 0,001 mm reales se representan por 1 cm en el plano.

a) Como 10 m = 10 000 mm, la escala es 1:10 000.

b) Como 50 km = 500 000 dm, la escala es 1:500 000.

c) Como 0,001 mm = 0,0001 cm, la escala es 10 000:1.

6. **En el plano de un piso cuya escala es 1:200, el salón ocupa una superficie de 7 cm².** **¿Cuál es la superficie real del salón?**

$7 \cdot 200^2 = 280\,000 \text{ cm}^2 = 28 \text{ m}^2$

7. **Un rombo cuyas diagonales miden 275 cm y 150 cm, ¿qué área ocupará en un plano de escala 1:25?**

Área $= \dfrac{275 \cdot 150}{2} = 20\,625 \text{ cm}^2$

En el plano ocupará $\dfrac{20\,625}{25^2} = 33 \text{ cm}^2$.

8. **Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcula:**

a) Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 cm de diámetro.

b) La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm².

c) El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm³ de agua.

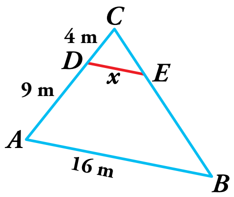
a) $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \;\rightarrow\; 250 \text{ cm} \\ 6 \text{ cm} \;\rightarrow\; \text{h} \\ 4 \text{ cm} \;\rightarrow\; d \end{array}\right\}\; \left.\begin{array}{l} \text{h} = 1500 \text{ cm} = 15 \text{ m} \\ d = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m} \end{array}\right\}$ La torre cilíndrica mide 15 m de altura y 10 m de diámetro.

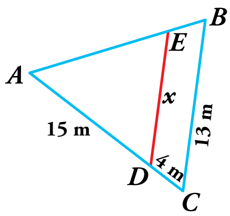
b) $40 \cdot 250^2 = 2\,500\,000 \text{ cm}^2 = 250 \text{ m}^2$

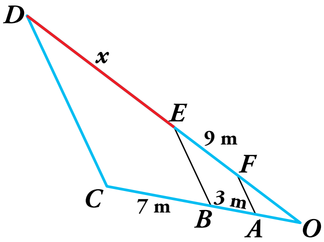
c) $20 \cdot 250^3 = 312\,500\,000 \text{ cm}^3 = 312{,}5 \text{ m}^3$

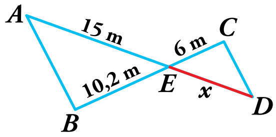
Semejanza de triángulos

9. **Identifica triángulos en posición de Tales en cada figura y calcula, en cada caso, la longitud del segmento DE:**

a) 

b) 

c) 

d) 

a) Los triángulos $\widehat{ACB}$ y $\widehat{DCE}$ están en posición de Tales porque tienen $\hat{C}$ en común y los lados DE y AB son paralelos. Por tanto, son semejantes y se cumple:

$$\frac{x}{16} = \frac{4}{13} \rightarrow x = \frac{16 \cdot 4}{13} = \frac{64}{13} = 4{,}92 \text{ m}$$

b) $\widehat{BAC}$ y $\widehat{EAD}$ están en posición de Tales porque $\hat{A}$ es común a ambos y ED y BC son paralelos. Por tanto, son semejantes y:

$$\frac{x}{13} = \frac{15}{19} \rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{19} = 10{,}26 \text{ m}$$

c) $\widehat{FOA}$, $\widehat{EOB}$ y $\widehat{DOC}$ están en posición de Tales, porque $\hat{O}$ es común a los tres triángulos y $FA \,//\, EB \,//\, DC$. Por tanto:

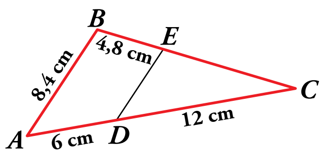
$$\frac{x}{7} = \frac{9}{3} \rightarrow x = \frac{9 \cdot 7}{3} = \frac{63}{3} = 21 \text{ m}$$

d) $\widehat{AEB}$ y $\widehat{CED}$ están en posición de Tales, porque $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$ (opuestos por el vértice) y $AB \,//\, CD$. Por tanto:

$$\frac{15}{x} = \frac{10{,}2}{6} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 15}{10{,}2} = 8{,}82 \text{ m}$$

10. **En la figura, el segmento DE es paralelo a AB.**

Justifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$.



Los triángulos ABC y CDE son semejantes porque tienen un ángulo común, $\hat{C}$, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos, $DE \,//\, AB$. Están en posición de Tales.

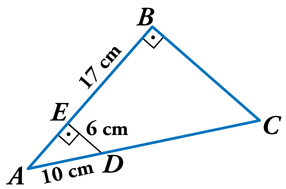
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{\overline{DE}}{8{,}4} = \frac{12}{18} \rightarrow \overline{DE} = \frac{12 \cdot 8{,}4}{18} = 5{,}6 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{x}{4{,}8 + x} = \frac{5{,}6}{8{,}4} \rightarrow 8{,}4x = 26{,}88 + 5{,}6x \rightarrow 2{,}8x = 26{,}88 \rightarrow x = 9{,}6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{EC} = 9{,}6 \text{ cm}$$

11. **¿Por qué son semejantes los triángulos *ABC* y *AED*?**

Halla el perímetro del trapecio *EBCD*.



Porque son rectángulos con un ángulo agudo común, $\hat{A}$. Tienen los tres ángulos iguales.

- Hallamos $\overline{EA}$ aplicando el teorema de Pitágoras:

$\overline{EA} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm, $\overline{AB} = 8 + 17 = 25$ cm

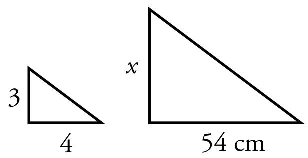
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{EA}} \rightarrow \dfrac{10 + x}{10} = \dfrac{25}{8} \rightarrow 80 + 8x = 250 \rightarrow 8x = 170$

$x = 21{,}25 \rightarrow \overline{DC} = 21{,}25$ cm

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{6} = \dfrac{25}{8} \rightarrow \overline{BC} = \dfrac{150}{8} = 18{,}75$ cm

- Perímetro de $EBCD = 17 + 18{,}75 + 21{,}25 + 6 = 63$ cm

12. **En un triángulo rectángulo, la relación entre los catetos es 3/4. Halla el perímetro de otro triángulo semejante en el que el cateto menor mide 54 cm.**



$\dfrac{54}{x} = \dfrac{3}{4} \rightarrow x = \dfrac{54 \cdot 4}{3} = 72$ cm mide el cateto mayor.

$h = \sqrt{54^2 + 72^2} = 90$ cm mide la hipotenusa.

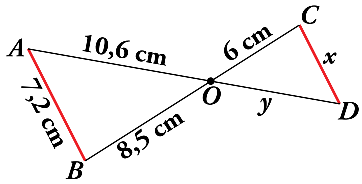
Perímetro $= 54 + 72 + 90 = 216$ cm

13. **La razón de semejanza entre dos triángulos es 2/5. Si el área del mayor es 150 cm^2, ¿cuál es el área del menor?**

El área del menor es $150 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = 24$ cm^2.

Página 136

14. **Observa esta figura, en la que el segmento *AB* es paralelo a *CD*.**



a) Di por qué son semejantes los triángulos *AOB* y *ODC*.

b) Calcula *x* e *y*.

a) Son semejantes porque tienen un ángulo igual, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ por ser opuestos por el vértice, y los lados opuestos a ese ángulo son paralelos.

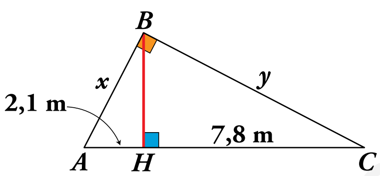
b) $\dfrac{x}{7,2} = \dfrac{6}{8,5} \to x = \dfrac{7,2 \cdot 6}{8,5} \approx 5,08$ cm

$\dfrac{6}{8,5} = \dfrac{y}{10,6} \to y = \dfrac{10,6 \cdot 6}{8,5} \approx 7,48$ cm

Teoremas del cateto y de la altura

15. **En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos se ha trazado la altura *BH* sobre la hipotenusa. Halla, en cada caso, los segmentos *x* e *y*.**

a)

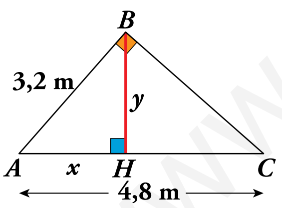


a) $\overline{BH}^2 = 2,1 \cdot 7,8 \to \overline{BH} \approx 4,05$ m

En el triángulo *ABH*, $x^2 = 2,1^2 + 4,05^2 \to x \approx 4,56$ m

En el triángulo *BHC*, $y^2 = 7,8^2 + 4,05^2 \to y \approx 8,79$ m

b)

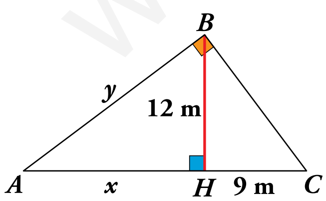


b) Por el teorema del cateto:

$3,2^2 = 4,8x \to x \approx 2,13$ m

En el triángulo *ABH*, $y^2 = 3,2^2 - 2,13^2 \to y \approx 2,39$ m

c)



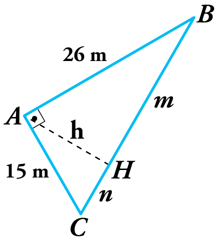
c) Por el teorema de la altura:

$12^2 = x \cdot 9 \to x = 16$ m

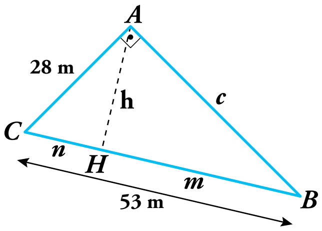
En el triángulo *ABH*, $y^2 = 12^2 + 16^2 \to y = 20$ m

16. **Calcula los valores que faltan en cada uno de los siguientes triángulos, rectángulos en A:**

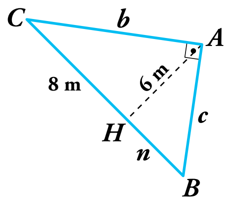
a)



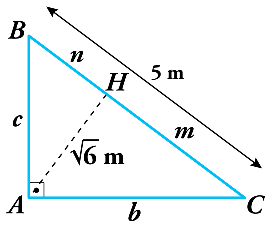
b)



c)



d)



a) Por el teorema de Pitágoras:

$(m + n)^2 = 15^2 + 26^2 \to$

$\to m + n = \sqrt{901} \approx 30{,}02$ m

Por el teorema del cateto:

$15^2 = 30{,}02 \cdot n \to n = 7{,}50$ m

$26^2 = 30{,}02 \cdot m \to m = 22{,}52$ m

Por el teorema de la altura:

$\text{h}^2 = 7{,}50 \cdot 22{,}52 \to \text{h} = 13$ m

b) Por el teorema de Pitágoras:

$53^2 = 28^2 + c^2 \to c = 45$ m

Por el teorema del cateto:

$28^2 = 53 \cdot n \to n = 14{,}79$ m

$45^2 = 53 \cdot m \to m = 38{,}21$ m

Por el teorema de la altura:

$\text{h}^2 = 14{,}79 \cdot 38{,}21 \to \text{h} = 23{,}77$ m

c) Por el teorema de la altura:

$6^2 = 8 \cdot n \to n = 4{,}5$ m

Por el teorema de Pitágoras:

$b^2 = 8^2 + 6^2 \to b = 10$ m

Por el teorema del cateto:

$c^2 = (8 + 4{,}5) \cdot 4{,}5 \to c = 7{,}5$ m

d) Por el teorema de la altura $\left(\sqrt{6}\right)^2 = m \cdot n$:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{6}\right)^2 = m \cdot n \\ 5 = m + n\end{array}\right\} \to m = 5 - n$$

$6 = (5 - n)\,n \to 6 = 5n - n^2 \to n^2 - 5n + 6 = 0$

$$n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

- Si $n = 3$, por el teorema de Pitágoras:

  $c^2 = 3^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \to c = \sqrt{15} = 3{,}87$ m

  Si $n = 3 \to m = 2$, y por el teorema de Pitágoras:

  $b^2 = 2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \to b = \sqrt{10} = 3{,}16$ m

- Si $n = 2$, por el teorema de Pitágoras:

  $c^2 = 2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \to c = 3{,}16$ m

  $b^2 = 3^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 \to b = 3{,}87$ m

Las soluciones son complementarias.

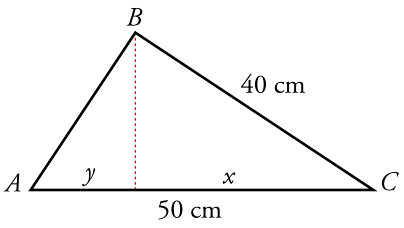
17. **Dibuja, en cada caso, un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa.**

a) Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si esta mide 50 cm y el cateto mayor, 40 cm.

b) La hipotenusa mide 25 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 9 cm. Halla el cateto mayor.

c) La altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa, 4,5 cm. Halla la hipotenusa.

a)



$40^2 = 50 \cdot x \rightarrow x = 32$ cm

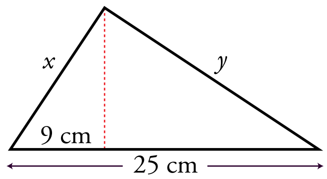
Proyección de AB sobre AC:

$50 - 32 = 18$ cm

O bien: $\overline{AB} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ cm

$30^2 = 50 \cdot y \rightarrow y = 18$ cm

b)



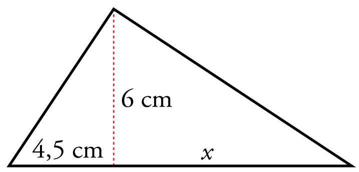
La proyección de y sobre la hipotenusa es:

$25 - 9 = 16$ cm

Por el teorema del cateto:

$y^2 = 25 \cdot 16 \rightarrow y = 20$ cm

c)



Por el teorema de la altura:

$6^2 = 4,5 \cdot x \rightarrow x = 8$ cm

Hipotenusa $= 4,5 + 8 = 12,5$ cm

18. **El mástil de una bandera está sujeto a tierra por dos cables que forman un ángulo recto en el punto más alto del mástil. Las distancias desde la base del mástil a los puntos de sujeción de los cables son 12 m y 15 m. Calcula la altura del mástil.**

Por el teorema de la altura:

$h^2 = 12 \cdot 15 = 180 \rightarrow h = \sqrt{180} = 13,42$ m

Aplica lo aprendido

19. **Dos depósitos cilíndricos semejantes tienen un volumen de 100 m³ y 250 m³, respectivamente. Si la altura del menor es 1,5 m, ¿cuánto mide el radio del mayor?**

Como los depósitos son semejantes, sabemos que $V_{\text{MAYOR}} = k^3 \cdot V_{\text{MENOR}}$, con k = razón de semejanza:

$$250 = k^3 \cdot 100 \rightarrow k^3 = \frac{250}{100} = \frac{5}{2} \rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Por otra parte:

$$V_{\text{MENOR}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow 100 = \pi \cdot r^2 \cdot 1,50 \rightarrow r^2 = \frac{100}{1,50\pi} = \frac{200}{3\pi} \rightarrow r = \sqrt{\frac{200}{3\pi}} \text{ m}$$

Por lo que podemos calcular el radio del mayor:

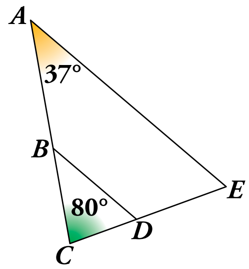
$$R = k \cdot r = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{\frac{200}{3\pi}} = 6,25 \text{ m}$$

20. **Si BD es paralelo a AE, y $\overline{AC} = 15$ cm, $\overline{CE} = 11$ cm y $\overline{BC} = 6{,}4$ cm:**

a) Calcula $\overline{CD}$.

b) ¿Podemos saber cuánto vale $\overline{AE}$ sin medirlo directamente?

c) Si $\hat{A} = 37°$ y $\hat{C} = 80°$, calcula $\hat{E}$, $\hat{B}$ y $\hat{D}$.



a) Los triángulos ACE y BCD son semejantes.

Por tanto: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \rightarrow \dfrac{15}{6{,}4} = \dfrac{11}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \dfrac{11 \cdot 6{,}4}{15} \approx 4{,}69$ cm

b) No podemos saber lo que mide AE porque no conocemos la medida del lado correspondiente, BD.

c) $\hat{E} = 180° - (37° + 80°) = 63°$; $\hat{B} = \hat{A} = 37°$; $\hat{D} = \hat{E} = 63°$

21. **Los lados mayores de dos triángulos semejantes miden 8 cm y 13,6 cm, respectivamente. Si el área del primero es 26 cm^2, ¿cuál es el área del segundo?**

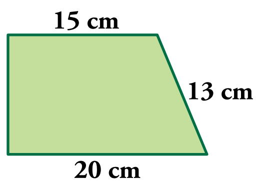
Como los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales. Así:

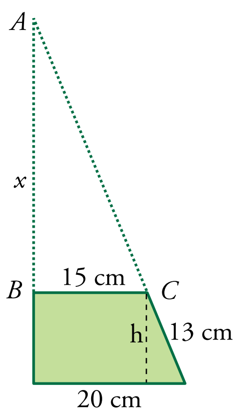
$k = \dfrac{13{,}6}{8} = 1{,}7$ es la razón de semejanza.

Por tanto:

Área del mayor $= k^2 \cdot$ Área del menor $= 1{,}7^2 \cdot 26 = 75{,}14$ cm^2

22. **Calcula el perímetro del triángulo cuya base coincide con la base mayor de este trapecio rectángulo y que se obtiene al prolongar los lados no paralelos hasta que se corten.**





$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ cm

$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x + 12}{20} \rightarrow 20x = 15x + 180 \rightarrow x = 36$ cm

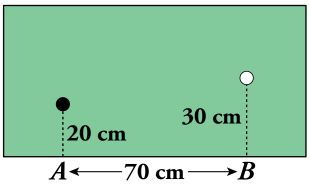
Catetos del triángulo: 20 cm y 48 cm

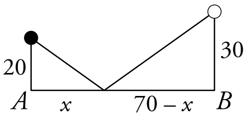
Hipotenusa: $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$ cm

Perímetro: 20 + 48 + 52 = 120 cm

Página 137

23. **¿En qué punto comprendido entre *A* y *B* debe dar la bola blanca para que al rebotar alcance a la bola negra?**

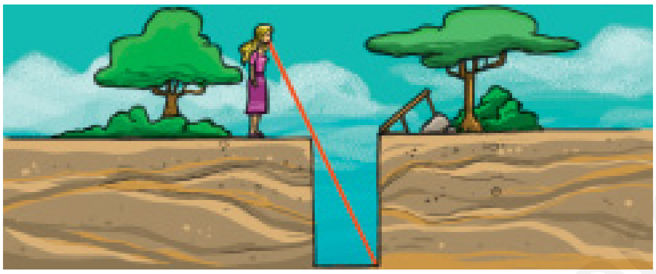


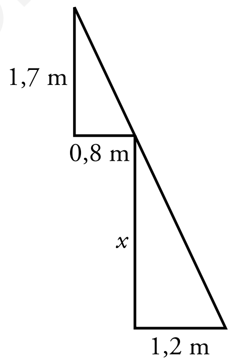


$\dfrac{20}{x} = \dfrac{30}{70 - x} \rightarrow 1\,400 - 20x = 30x \rightarrow 1\,400 = 50x \rightarrow x = 28$ cm

Debe dar a 28 cm del punto *A*.

24. **¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?**

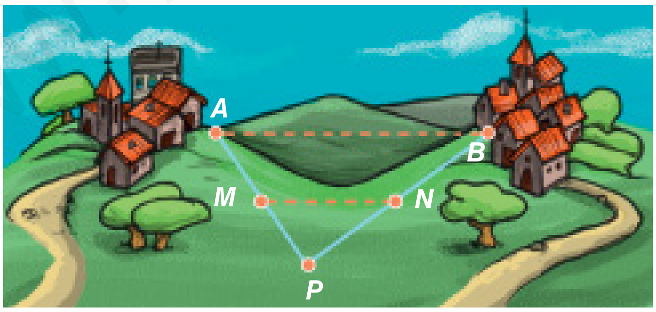


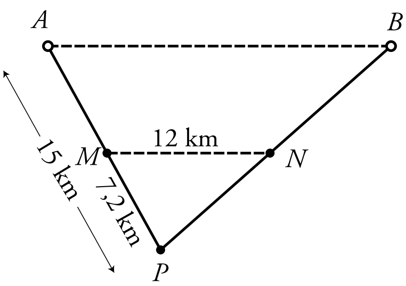


$\dfrac{x}{1,7} = \dfrac{1,2}{0,8} \rightarrow x = \dfrac{1,2 \cdot 1,7}{0,8} \rightarrow x = 2,55$ m

La profundidad es de 2,55 m.

25. **Entre dos pueblos *A* y *B* hay una colina. Para medir la distancia $\overline{AB}$, fijamos un punto *P* desde el que se ven los dos pueblos y tomamos las medidas $\overline{AP} = 15$ km, $\overline{PM} = 7,2$ km y $\overline{MN} = 12$ km. (*MN* es paralela a *AB*). Halla la distancia $\overline{AB}$.**



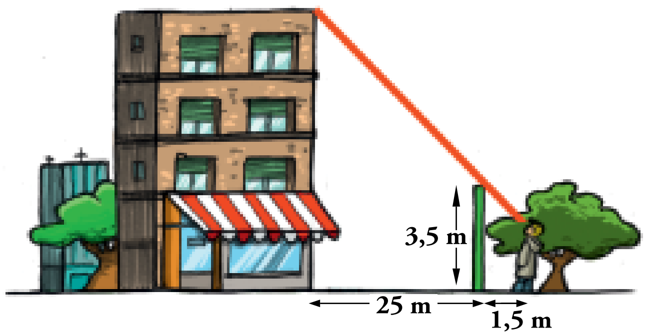


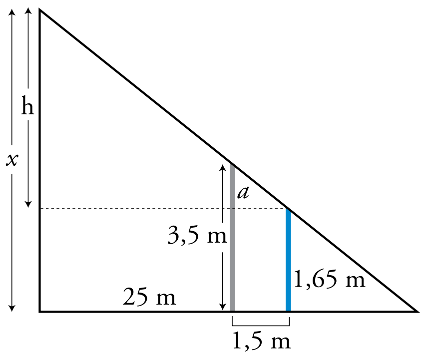
Los triángulos *APB* y *MPN* son semejantes.

Por tanto:

$\dfrac{\overline{AB}}{12} = \dfrac{15}{7,2} \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{15 \cdot 12}{7,2} = 25$ km

26. **Para medir la altura de la casa, Álvaro, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas. ¿Cuánto mide la casa?**





$a = 3{,}5 - 1{,}65 = 1{,}85$ m

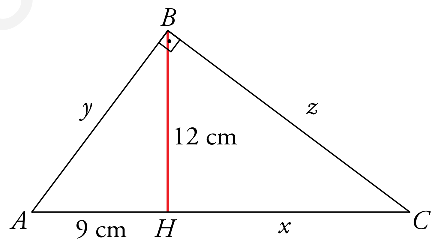
$$\frac{25+1{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1{,}85} \rightarrow h = \frac{26{,}5 \cdot 1{,}85}{1{,}5} = 32{,}68 \text{ m}$$

Altura de la casa: $32{,}68 + 1{,}65 = 34{,}33$ m

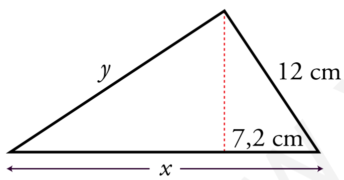
27. **La altura relativa a la hipotenusa del triángulo *ABC*, rectángulo en *B*, mide 12 cm y la proyección del cateto *AB* sobre la hipotenusa mide 9 cm. Halla el perímetro de ese triángulo.**

Por el teorema de la altura: $12^2 = 9 \cdot x \rightarrow x = 16$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow y = 15 \text{ cm} \\ z^2 = 12^2 + 16^2 \rightarrow z = 20 \text{ cm} \end{array}\right\} \text{Perímetro: } 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}$$



28. **Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m y su proyección sobre la hipotenusa mide 7,2 m. Calcula el área y el perímetro del triángulo.**



Por el teorema del cateto:

$12^2 = 7{,}2x \rightarrow x = 20$ m

$y^2 = 20^2 - 12^2 \rightarrow y = 16$ m

$$\text{Área} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ m}^2, \text{ Perímetro} = 16 + 12 + 20 = 48 \text{ m}$$

29. **El perímetro de un triángulo isósceles es 64 m, y el lado desigual mide 14 m.**

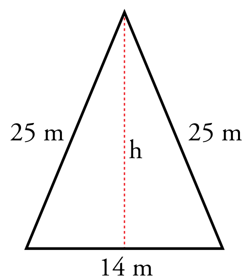
Calcula el área de un triángulo semejante cuyo perímetro es de 96 m.

Altura del triángulo: $h^2 = 25^2 - 7^2 \rightarrow h = 24$ m

$$\text{Área} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 168 \text{ m}^2$$

$$\text{Razón de semejanza} = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Área del triángulo semejante} = 168 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 378 \text{ cm}^2$$



30. **Dos triángulos *ABC* y *PQR* son semejantes. Los lados del primero miden 24 m, 28 m y 34 m.**

Calcula la medida de los lados del segundo triángulo sabiendo que su perímetro es 129 m.

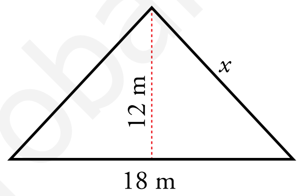
Perímetro del triángulo *ABC*: $24 + 28 + 34 = 86$ m

Razón de semejanza: $\dfrac{129}{86} = \dfrac{3}{2}$

Lados del triángulo *PQR*: $24 \cdot \dfrac{3}{2} = 36$ cm; $28 \cdot \dfrac{3}{2} = 42$ cm; $34 \cdot \dfrac{3}{2} = 51$ cm

31. **Las áreas de dos triángulos isósceles semejantes son 48 m² y 108 m². Si el lado desigual del primer triángulo es 12 m, ¿cuál es el perímetro del segundo?**

Razón de semejanza: $\sqrt{\dfrac{108}{48}} = 1{,}5$



Lado desigual del segundo: $12 \cdot 1{,}5 = 18$ cm

Altura del segundo: $108 = \dfrac{18 \cdot h}{2} \rightarrow h = 12$ cm

Lados desiguales del segundo: $x^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow x = 15$ cm

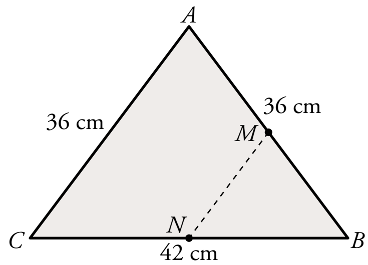
Perímetro del segundo: $18 + 15 + 15 = 48$ cm

32. **Los lados de un triángulo *ABC* miden:**

$$\overline{AC} = \overline{AB} = 36 \text{ cm}, \quad \overline{CB} = 42 \text{ cm}$$

Desde un punto *M* de *AB* se traza una paralela a *AC*, que corta al lado *BC* en un punto *N*. ¿Cuánto deben medir los lados del triángulo *MBN* para que su área sea 1/9 de la del triángulo *ABC*?

$\dfrac{\text{Área de } MNB}{\text{Área de } ABC} = \dfrac{1}{9} \rightarrow k^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow k = \dfrac{1}{3}$



$36 \cdot \dfrac{1}{3} = 12$ cm; $42 \cdot \dfrac{1}{3} = 14$ cm

$\overline{MB} = \overline{MN} = 12$ cm; $\overline{NB} = 14$ cm

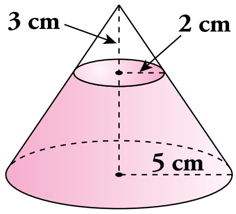
33. **Queremos construir un ortoedro de volumen 36 015 cm³ que sea semejante a otro de dimensiones 25 × 15 × 35 cm. ¿Cuánto medirán sus aristas?**

$V = 25 \cdot 15 \cdot 35 = 13\,125$ cm^3

$k^3 = \dfrac{36\,015}{13\,125} = 2{,}744 \rightarrow k = 1{,}4$

Las aristas del ortoedro deben medir: $25 \cdot 1{,}4 = 35$ cm; $15 \cdot 1{,}4 = 21$ cm y $35 \cdot 1{,}4 = 49$ cm.

34. **De un cono de radio 5 cm hemos cortado otro cono de radio 2 cm y altura 3 cm. Calcula el volumen del cono grande.**

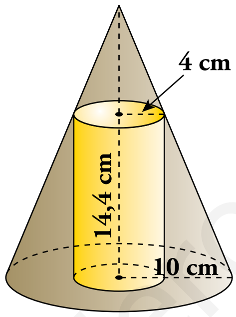


Calculamos la altura del cono grande, x:

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 7{,}5 = 62{,}5\pi \text{ cm}^3$$

35. **En un cono de 10 cm de radio hemos inscrito un cilindro de radio 4 cm y altura 14,4 cm. Halla la altura del cono.**



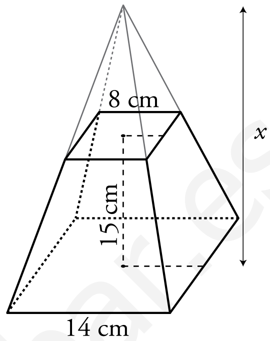
$$\frac{x + 14{,}4}{x} = \frac{10}{4} \rightarrow 4x + 57{,}6 = 10x \rightarrow 6x = 57{,}6 \rightarrow x = 9{,}6 \text{ cm}$$

Altura del cono: 9,6 + 14,4 = 24 cm

Página 138

Resuelve problemas

36. **Calcula el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular de 15 cm de altura en el que los lados de las bases miden 8 cm y 14 cm.**



Calculamos la altura de la pirámide menor, x:

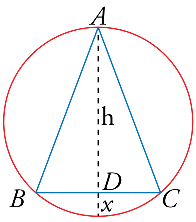
$$\frac{x+15}{x} = \frac{7}{4} \rightarrow 4x + 60 = 7x \rightarrow 60 = 3x \rightarrow x = 20 \text{ cm}$$

Volumen de la pirámide grande $= \frac{1}{3} \cdot 14^2 \cdot (20 + 15) = 2\,286{,}67 \text{ cm}^3$

Volumen de la pirámide pequeña $= \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 20 = 426{,}67 \text{ cm}^3$

Volumen del tronco de pirámide $= 2\,286{,}67 - 426{,}67 = 1\,860 \text{ cm}^3$

37. **En una circunferencia de radio desconocido, hemos inscrito un triángulo isósceles de lados $\overline{AB} = \overline{AC} = 16$ m y $\overline{BC} = 10$ m. Halla el radio de esa circunferencia.**



Por el teorema de Pitágoras sobre $\widehat{ADC}$:

$16^2 = \text{h}^2 + 5^2 \rightarrow \text{h} = \sqrt{231} = 15{,}20$ m

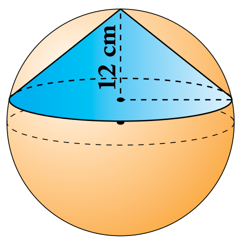
Observamos que $\widehat{ADB}$ y $\widehat{BDE}$ son semejantes. Por tanto:

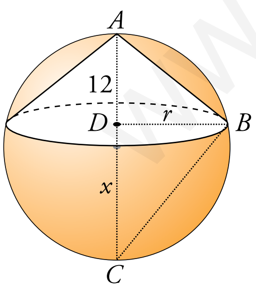
$$\frac{15{,}20}{5} = \frac{5}{x} \rightarrow 15{,}20x = 25 \rightarrow x = \frac{25}{15{,}20} = 1{,}64 \text{ m}$$

Luego, el radio de la circunferencia será:

$$\frac{\text{h} + x}{2} = \frac{15{,}20 + 1{,}64}{2} = 8{,}42 \text{ m}$$

38. **En una esfera de 15 cm de radio hemos inscrito un cono de altura 12 cm. Calcula su área lateral.**





Radio de la esfera: 15 cm

$\overline{DC} = 30 - 12 = 18$ cm

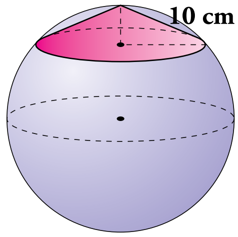
Calculamos el radio del cono utilizando el teorema de la altura en el triángulo ABC:

$r^2 = 12 \cdot 18 \rightarrow r \approx 14{,}7$ cm

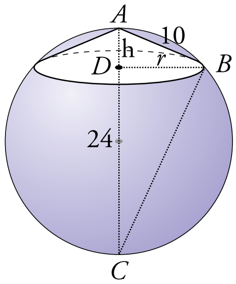
Generatriz del cono: $g^2 = 12^2 + 14{,}7^2 \rightarrow g \approx 18{,}98$ cm

Área lateral del cono: $\pi r g = \pi \cdot 14{,}7 \cdot 18{,}98 \approx 279\pi \text{ cm}^2$

39. **En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.**



Para calcular la altura del cono, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo *ABC*:

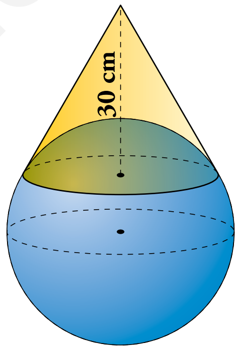


$10^2 = \text{h} \cdot 24 \ \rightarrow \ \text{h} \approx 4{,}17 \text{ cm}$

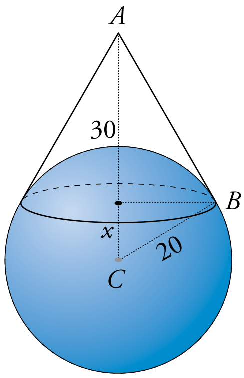
Radio del cono: $r^2 = 10^2 - 4{,}17^2 \ \rightarrow \ r \approx 9{,}09 \text{ cm}$

$V_{\text{CONO}} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 9{,}09^2 \cdot 4{,}17 \approx 114{,}85\pi \text{ cm}^3$

40. **Sobre una esfera de 20 cm de radio se encaja un cono de 30 cm de altura. Halla el área del casquete esférico que determina el cono.**



Para hallar x, aplicamos el teorema del cateto en el triángulo rectángulo *ABC*:



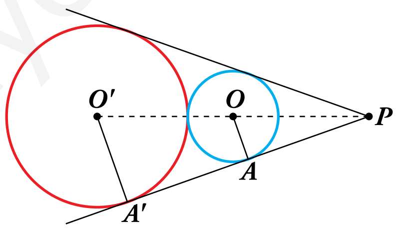
$20^2 = (30 + x)\,x \ \rightarrow \ 400 = 30x + x^2$

$x^2 + 30x - 400 = 0 \ \rightarrow \ x = \dfrac{-30 \pm 50}{2} = \begin{cases} -40. \text{ No vale.} \\ 10 \text{ cm} \end{cases}$

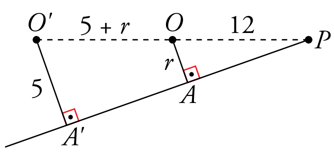
Altura del casquete = 20 – 10 = 10 cm

Área del casquete = $2\pi R\text{h} = 2\pi \cdot 20 \cdot 10 = 400\pi \text{ cm}^2$

41. **Desde un punto *P* trazamos tangentes a dos circunferencias tangentes exteriores. Si $\overline{OP}$ = 12 cm y $\overline{O'A'}$ = 5 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia menor?**



Los triángulos *OAP* y *O'A'P'* son semejantes por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

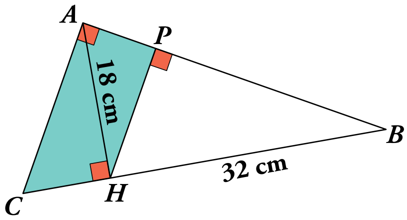


$\dfrac{5}{r} = \dfrac{17 + r}{12} \ \rightarrow \ 60 = 17r + r^2 \ \rightarrow \ r^2 + 17r - 60 = 0$

$r = \dfrac{-17 \pm 23}{2} = \begin{cases} -20. \text{ No vale} \\ 3 \end{cases}$

El radio de la circunferencia menor mide 3 cm.

42. **En el triángulo ABC, rectángulo en A, conocemos $\overline{AH}$ = 18 cm y $\overline{HB}$ = 32 cm.**



a) Calcula $\overline{CH}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

b) Aplica el teorema del cateto en el triángulo rectángulo AHB para obtener $\overline{AP}$. Calcula $\overline{PH}$.

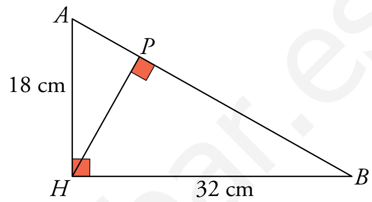
c) Halla el área y el perímetro del trapecio $APHC$.

a) Por el teorema de la altura:

$\overline{AH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{HB} \;\to\; 18^2 = \overline{CH} \cdot 32 \;\to\; \overline{CH} = 10{,}125$ cm

$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \;\to\; \overline{AC} = \sqrt{18^2 + 10{,}125^2} \;\to$

$\to\; \overline{AC} \approx 20{,}65$ cm

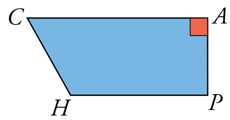


$\overline{AB} = \sqrt{18^2 + 32^2} \;\to\; \overline{AB} \approx 36{,}72$ cm

b) $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AP} \;\to\; \overline{AP} = \dfrac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \dfrac{18^2}{36{,}71} \approx 8{,}83$ cm

$\overline{HP} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{PA}^2} = \sqrt{18^2 - 8{,}83^2} \;\to\; \overline{HP} \approx 15{,}69$ cm

c)



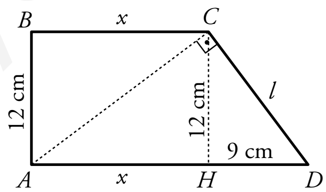
Perímetro $(APHC) = \overline{CH} + \overline{HP} + \overline{PA} + \overline{AC} = 55{,}295$ cm

Área $(APHC) = \dfrac{\overline{PH} + \overline{AC}}{2} \cdot \overline{AP} =$

$= \dfrac{15{,}69 + 20{,}65}{2} \cdot 8{,}83 \approx 160{,}44 \text{ cm}^2$

43. **En un trapecio rectángulo, la diagonal menor es perpendicular al lado oblicuo, la altura mide 12 cm y la diferencia entre las bases es de 9 cm.**

Calcula el perímetro y el área del trapecio.



En el triángulo ACD:

$12^2 = x \cdot 9 \;\to\; x = 16$ cm $\;\to\; \overline{AD} = 9 + 16 = 25$ cm

En el triángulo CHD:

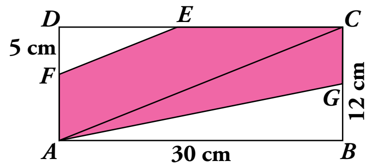
$l^2 = 12^2 + 9^2 \;\to\; l = 15$ cm

Perímetro del trapecio: 12 + 16 + 15 + 25 = 68 cm

Área del trapecio: $\dfrac{16 + 25}{2} \cdot 12 = 246 \text{ cm}^2$

44. **En el rectángulo de la figura, EF es paralelo a AC, y G es el punto medio de BC.**

Si $\overline{DF}$ = 5 cm, ¿cuál es el área y el perímetro del pentágono *FECGA*?



$\overline{AC}^2 = 30^2 + 12^2 \rightarrow \overline{AC} \approx 32{,}31$ cm

Los triángulos FDE y ADC son semejantes. Por ello:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} \rightarrow \frac{5}{12} = \frac{\overline{FE}}{32{,}31} \rightarrow \overline{FE} \approx 13{,}46 \text{ cm}$$

En el triángulo FDE, $\overline{DE}^2 = \overline{FE}^2 - \overline{DF}^2 = 13{,}46^2 - 5^2 \rightarrow \overline{DE} \approx 12{,}5$ cm

$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 30 - 12{,}5 = 17{,}5$ cm

$\overline{CG} = 6$ cm

$\overline{AG}^2 = 30^2 + 6^2 \rightarrow \overline{AG} \approx 30{,}59$ cm

$\overline{AF} = 7$ cm

Área del triángulo $FDE = \dfrac{12{,}5 \cdot 5}{2} = 31{,}25 \text{ cm}^2$

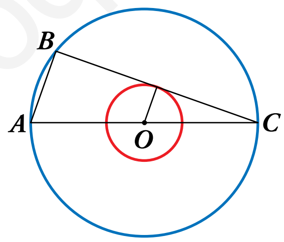
Área del triángulo $ABG = \dfrac{30 \cdot 6}{2} = 90 \text{ cm}^2$

Área del pentágono $= 30 \cdot 12 - 31{,}25 - 90 = 238{,}75 \text{ cm}^2$

Perímetro del pentágono:

$$\overline{FE} + \overline{EC} + \overline{CG} + \overline{GA} + \overline{AF} = 13{,}46 + 17{,}5 + 6 + 30{,}59 + 7 = 74{,}55 \text{ cm}$$

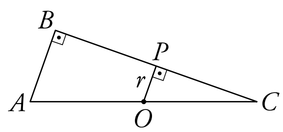
45. **En estas dos circunferencias concéntricas, el radio de la mayor es el triple que el de la menor.**



Hemos trazado el diámetro AC y la cuerda BC, que es tangente a la circunferencia interior.

Si $\overline{AB}$ = 10 cm, ¿cuánto miden los radios de cada circunferencia?

Los triángulos ABC y OPC son semejantes, por ser rectángulos con un ángulo agudo común.

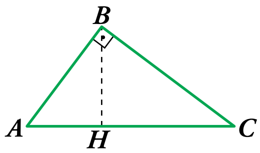


Si $\overline{OP} = r \rightarrow \overline{OC} = 3r \rightarrow \overline{AC} = 6r$

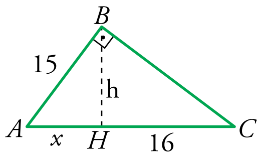
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} \rightarrow \frac{10}{r} = \frac{6r}{3r} \rightarrow 10 = 2r \rightarrow r = 5$$

Los radios miden 5 cm y 15 cm.

46. **En el triángulo rectángulo *ABC*, hemos trazado la altura sobre la hipotenusa *BH*.**



Halla el área del triángulo en el que conocemos $\overline{AB}$ = 15 cm y $\overline{HC}$ = 16 cm.



$$\left.\begin{array}{l} h^2 + x^2 = 15^2 \\ h^2 = 16 \cdot x \end{array}\right\} \; 16x + x^2 = 225 \;\to\; x^2 + 16x - 225 = 0 \;\to$$

$$\to\; x = \frac{-16 \pm 34}{2} = \begin{cases} -25. \text{ No vale} \\ 9 \end{cases}$$

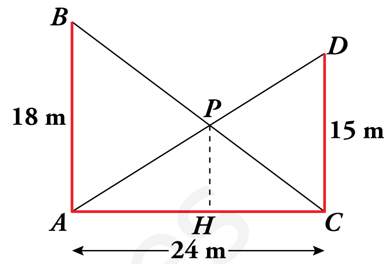
$h^2 = 16 \cdot 9 \;\to\; h = 12$ cm

$\text{Área} = \dfrac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$

Página 139

Problemas "+"

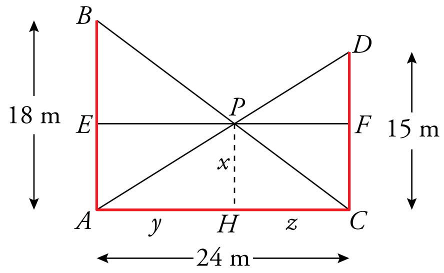
47. ***AB* y *CD* son dos edificios de 18 m y 15 m, respectivamente, y que distan entre sí 24 m. Desde el punto de corte, *P*, de las rectas *AD* y *CB*, se traza una perpendicular a *AC*. *H* es el pie de esa perpendicular.**



a) Calcula $\overline{PH}$.

b) Demuestra que la longitud de *PH* depende de la altura de los edificios y no de su separación.

a)



Trazamos el segmento *EF* paralelo a *AC* y que pasa por *P*.

Los triángulos $\widehat{BEP}$ y $\widehat{PHC}$ son semejantes porque son rectángulos y $\widehat{BPE} = \widehat{PCH}$. Por una razón análoga también lo son $\widehat{DPF}$ y $\widehat{PAH}$.

Tenemos, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{18-x}{x} = \dfrac{y}{z} \\[2ex] \dfrac{15-x}{x} = \dfrac{z}{y} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{18-x}{x} = \frac{x}{15-x} \rightarrow (18-x)(15-x) = x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 270 - 18x - 15x + x^2 = x^2 \rightarrow x = \frac{270}{33} = 8{,}18 \text{ m}$$

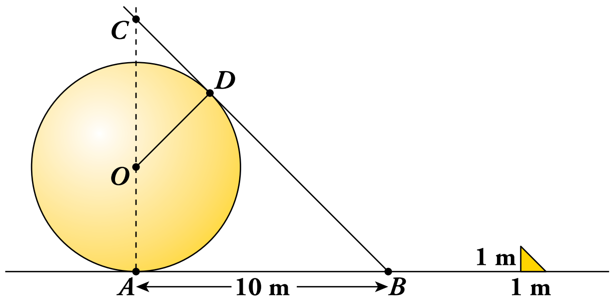
b) Hemos visto que la ecuación de la que hemos obtenido $\overline{PH}$ es:

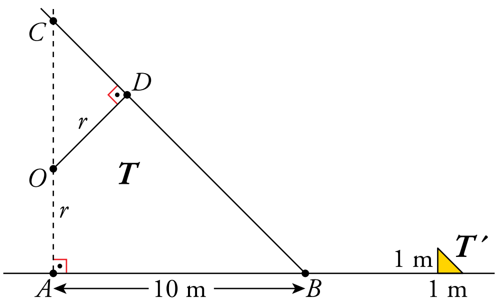
$$\frac{\text{h} - x}{x} = \frac{x}{\text{h}' - x}$$

donde h y h' son las alturas de los edificios.

Esta ecuación no depende de *y* ni de *z*, los parámetros de los que depende la separación de los edificios.

48. **Una esfera apoyada en el suelo proyecta una sombra que llega hasta 10 m del punto donde la esfera toca el suelo. En ese momento, un poste vertical de 1 m de alto produce una sombra de 1 m. Calcula el radio de la esfera.**





Los triángulos *T* y *T'* son semejantes.

$\overline{AC} = \overline{AB} = 10$ m

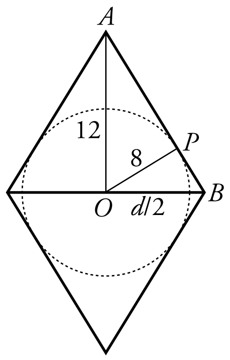
$\overline{CB} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ cm

Por la semejanza de OCD y ABC, tenemos:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}} \to \frac{r}{10} = \frac{10-r}{10\sqrt{2}} \to \sqrt{2}r = 10 - r \to$$

$$\to r\left(\sqrt{2}+1\right) = 10 \to r = \frac{10}{1+\sqrt{2}} = 10\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 4,14 \text{ cm}$$

49. **Una de las diagonales de un rombo mide 24 cm y el radio del círculo inscrito en dicho rombo es 8 cm. Calcula el perímetro y el área del rombo.**



En el triángulo rectángulo OAP:

$\overline{AP}^2 = 12^2 - 8^2 \to \overline{AP} = \sqrt{80} \approx 8,94$ cm

En el triángulo rectángulo OAB:

$8^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} \to \overline{PB} = \dfrac{64}{8,94} \approx 7,16$ cm

Lado del rombo: 8,94 + 7,16 = 16,1 cm

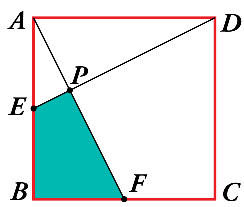
Perímetro del rombo: 4 · 16,1 = 64,4 cm

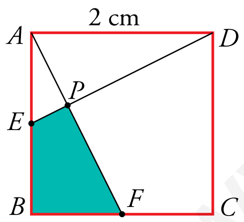
Diagonal: $\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = 16,1^2 - 12^2 \to \dfrac{d}{2} \approx 10,73 \to d \approx 21,46$ cm

Área: $\dfrac{24 \cdot 21,46}{2} = 257,52$ cm^2

50. **En el cuadrado de la figura, *E* es el punto medio del lado *AB*, y *F*, el punto medio de *BC*.**

Si el lado del cuadrado mide 2 cm, ¿cuál es el área del cuadrilátero *EPFB*?





Calcularemos el área de $EPFB$ como el área del triángulo ABF menos el área del triángulo AEP.

$\overline{ED} = \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Los triángulos ABF y AEP son semejantes porque:

$$\begin{cases} \hat{A} \text{ es común.} \\ \widehat{AEP} = \widehat{AFB} \text{ por la igualdad de los triángulos } ADE \text{ y } AFB. \end{cases}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{BF}} \to \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{EP}}{1} \to \overline{EP} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \to \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{AP}}{2} \to \overline{AP} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$A_{EPFB} = A_{ABF} - A_{APE} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \text{ cm}^2$$

Reflexiona sobre la teoría

51. **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Dos triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa son semejantes.

b) Todos los pentágonos regulares son semejantes.

c) Si los lados de un triángulo son a, b, c; y los de otro, $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$, no son semejantes.

d) Las pirámides cuadrangulares son todas semejantes entre sí.

e) Una escala 100:1 significa que 1 cm del dibujo corresponde a 1 m en la realidad.

a) Falso. Cualquier triángulo inscrito en una circunferencia y que abarque un ángulo llano es rectángulo, pero no todos son semejantes.

b) Verdadero. Todos los polinomios regulares con el mismo número de lados tienen sus ángulos iguales y los lados proporcionales.

c) Falso. Por ejemplo, si el triángulo es equilátero $(a = b = c)$, entonces $a + 1 = b + 1 = c + 1$ y los triángulos son semejantes.

d) Falso. Las bases serán semejantes pero para que lo sean las pirámides, debería coincidir el cociente entre el lado de la base y la altura, cosa que no necesariamente ocurre.

e) Falso. Una escala 100:1 es de ampliación, es decir, a 1 cm de la realidad le corresponde 1 m del dibujo.

52. **Justifica en qué casos podemos asegurar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes:**

a) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, $\hat{C} = \hat{C}'$

b) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\hat{A} = \hat{A}'$

c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \neq \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$, $\hat{B} = \hat{B}'$

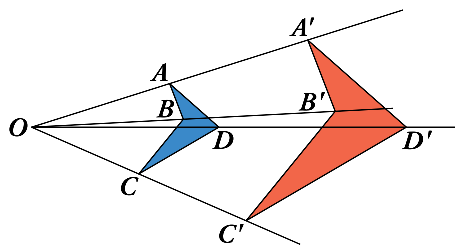
d) $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$

En b), porque tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo que forman.

En d), porque tienen los tres ángulos iguales.

53. **Se llama homotecia de centro O y razón k a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro P' tal que O, P y P' están alineados y $\overline{OP'} : \overline{OP} = k$.**

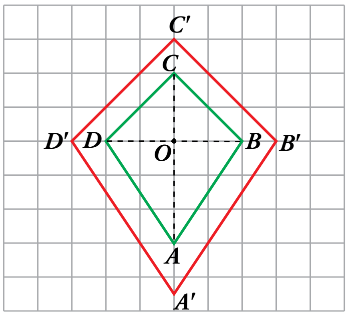
Justifica si las figuras azul y roja son homotéticas y en caso afirmativo di cuál es el centro y la razón.



Sí se trata de una homotecia de centro O y $k = 2$, puesto que:

- O, A, A' están alineados.
- O, B, B' están alineados.
- O, C, C' están alineados.
- O, D, D' están alineados.
- $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = 2$

54. **Hemos aplicado una homotecia al cuadrilátero *ABCD* para obtener el cuadrilátero *A'B'C'D'*.**



a) ¿Cuál es el centro y cuál es la razón?

b) Justifica que *ABCD* y *A'B'C'D'* son semejantes.

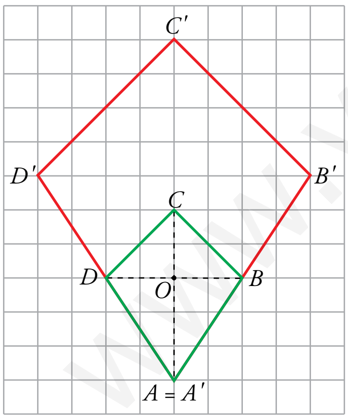
c) Aplica a *ABCD* una homotecia de centro *A* y razón 2.

a) El centro de la homotecia es O y la razón es $k = \frac{3}{2}$, puesto que:

- O, A, A' están alineados.
- O, B, B' están alineados.
- O, C, C' están alineados.
- O, D, D' están alineados.
- $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OD}} = \frac{3}{2}$

b) Las figuras son semejantes puesto que todos sus lados son proporcionales, según se ha visto en el apartado a). Además, los ángulos son iguales.

c)



Página 140

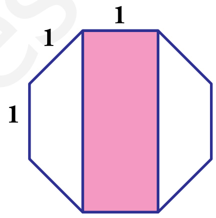
Aprende y reflexiona

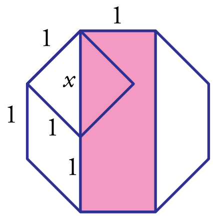
El número de plata y el triángulo cordobés

- **Compruébalo:** $\dfrac{\sqrt{2}+1}{1} \overset{?}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

Visto en el ejercicio 2b de la página 133.

- **Demuestra que el rectángulo coloreado sobre el octógono regular de la derecha es de plata.**





x es la diagonal de un cuadrado de radio 1.

Su medida es $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Los lados del rectángulo miden, por tanto, 1 y $1+\sqrt{2}$.

La relación entre ellos es $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1}=1+\sqrt{2}$, número de plata.

- **Prueba que la relación entre los lados del triángulo cordobés (radio y lado del octógono regular) es:**

$$\frac{r}{1}=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1{,}306562964 \text{ (número cordobés)}$$

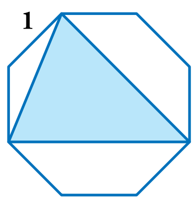
El radio del octógono es la mitad de la diagonal del rectángulo anterior:

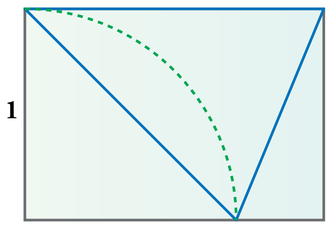
$$d=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{1+2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

$$r=\frac{d}{2}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{4-2}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}=1{,}306562964$$

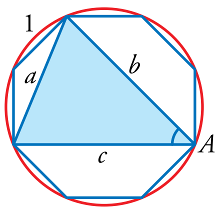
- **Demostrar que estos dos triángulos son cordobeses es fácil (45° e isósceles). Otra cosa es obtener sus dimensiones a partir del lado 1 en cada figura y probar que su cociente es el número cordobés.**

Intenta hacer ambas cosas en cada una de las dos figuras.





- Triángulo construido en el octógono:



Por construcción, $b=c$ y $a \neq b$.

El triángulo es isósceles.

El ángulo $\hat{A}$ es un ángulo inscrito en la circunferencia y abarca un ángulo de $\dfrac{2}{8}$ de 360° = 90°.

Por tanto, $\hat{A}=45°$.

El triángulo es, por tanto, cordobés.

Calculamos ahora la medida de los lados del triángulo. En el ejercicio anterior vimos que el radio del octógono es $r = \sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}}$.

El lado a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con dos catetos de medida r. Por tanto:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

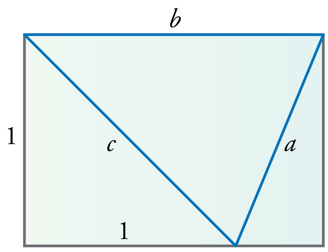
El lado b, según vimos, es $b = 1 + \sqrt{2}$.

Veamos que el cociente $\dfrac{b}{a}$ es el número de plata:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+2+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)}{9-8}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}, \text{ el número cordobés}$$

- Triángulo construido en una hoja A-4:



Los lados de una hoja A-4 están en la relación $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Es decir, $b = \sqrt{2}$.

Calculamos el lado c aplicando el teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Como $b = c \neq a$, el triángulo es isósceles.

El lado c es la diagonal de un cuadrado, luego el ángulo menor del triángulo es de 45°.

El triángulo construido es cordobés.

Nos falta calcular la medida del lado a, que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y $\sqrt{2} - 1$:

$$a = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{1+2+1-2\sqrt{2}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}} = \sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

Comprobamos que la relación entre los lados es el número cordobés:

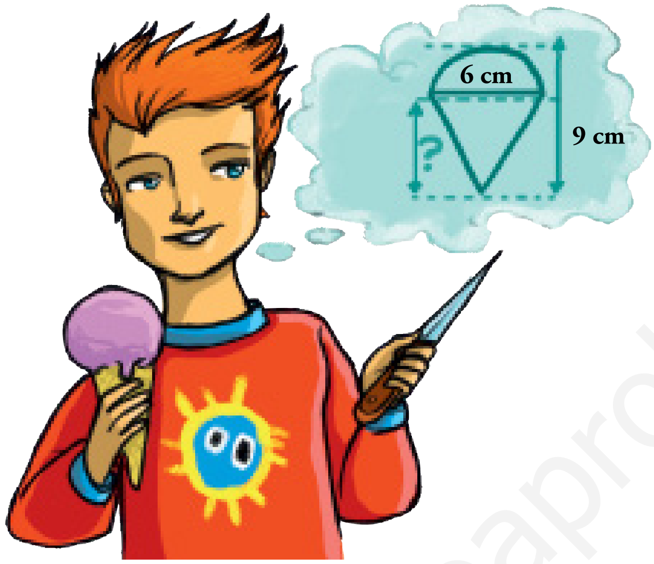
$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\left(2-\sqrt{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Página 141

Entrénate resolviendo problemas

- **Roberto y Carmina van a compartir un helado.**

  ¿A qué altura deben cortar el cucurucho para que las dos mitades sean iguales?



Hallamos primero el volumen del cucurucho entero:

Volumen de la media esfera:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3\right] = \frac{36\pi}{2} = 18\pi \text{ cm}^3$$

Volumen del cono: $V_2 = \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot 3^2 \cdot 6] = 18\pi \text{ cm}^3$

Luego, simplemente, habría que cortar a 6 cm de altura; es decir, el cono (cucurucho) para uno y la media esfera para el otro.

- **Para preparar una empanada de 15 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de grosor, se necesitan 18 onzas de masa. ¿Cuántas onzas de masa se necesitarán para una empanada de pulgada y media de grosor y 25 pulgadas de diámetro?**

El volumen de la primera empanada es, en pulgadas cúbicas, $\pi \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot 1$, y para prepararla se necesitan 18 onzas.

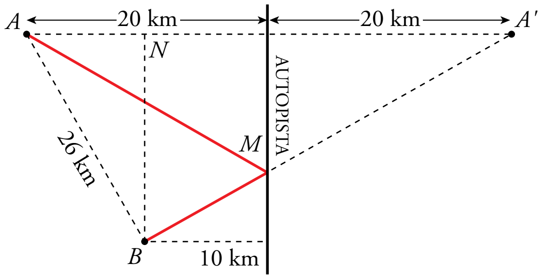
Para la segunda empanada se necesitarán este número de onzas:

$$18 \cdot \left(\frac{25}{15}\right)^2 \cdot \frac{1,5}{1} = 18 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{18 \cdot 25 \cdot 3}{3^2 \cdot 2} = 75 \text{ onzas}$$

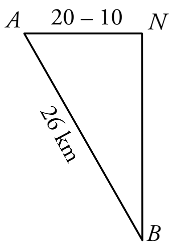
- **Dos localidades A y B se encuentran al mismo lado de una autopista recta, de la cual distan 20 km y 10 km, respectivamente.**

  Se desea construir una carretera lo más corta posible, que una ambas localidades en un punto de la autopista. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 26 km, halla la longitud de la carretera.

  El dibujo nos ayuda a relacionar los datos con lo que se nos pregunta.



Observamos que el recorrido AMB tiene la misma longitud que $A'MB$. Y que este recorrido es mínimo cuando el punto M está alineado con A' y B. Por tanto:



$$\overline{BN} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AN}^2} = \sqrt{676 - 100} = 24 \text{ km}$$

La longitud de la carretera es:

$$\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{BA'} = \sqrt{\overline{BN}^2 + \overline{NA'}^2} = \sqrt{24^2 + (10+20)^2} = 38{,}42 \text{ km}$$

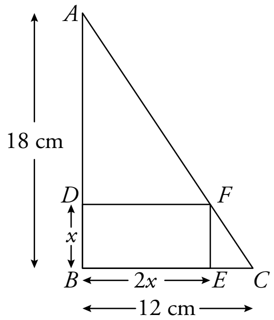
Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m². ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

$$\text{Perímetro} = \frac{850}{400} = 2{,}125 \text{ m} = 212{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{37\,500}{400^2} = 0{,}234375 \text{ m}^2 = 2\,343{,}75 \text{ cm}^2$$

2. En un triángulo rectángulo, se inscribe un rectángulo de lados paralelos a los catetos en el que la base mide el doble que la altura. Si los catetos miden 12 cm y 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{FEC}$ son semejantes, por lo que podemos afirmar:

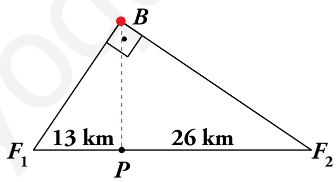
$$\frac{18}{x} = \frac{12}{12-2x} \rightarrow 18(12-2x) = 12x \rightarrow$$

$$\rightarrow 216 - 36x = 12x \rightarrow 216 = 48x \rightarrow x = 4{,}5 \text{ cm}$$

La altura es de 4,5 cm y la base, 9 cm.

3. Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F_1 y F_2. Desde ese punto, la línea que lo une al puerto P es perpendicular a la costa.

Sabemos que $\overline{PF_1} = 13$ km y que $\overline{PF_2} = 26$ km.



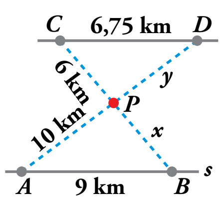
Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.

- Para calcular $\overline{BP}$, aplicamos el teorema de la altura:

  $\overline{BP}^2 = 13 \cdot 26 \rightarrow \overline{BP} = 18{,}38$ km

- $\overline{BF}_1^{\,2} = 13 \cdot 26 + 13^2 \rightarrow \overline{BF}_1 = 22{,}52$ km
- $\overline{BF}_2^{\,2} = 13 \cdot 26 + 26^2 \rightarrow \overline{BF}_2 = 31{,}84$ km

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.

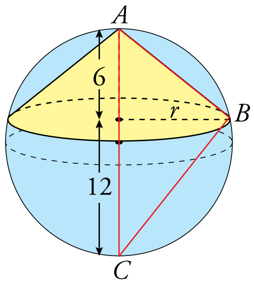


Los triángulos CDP y APB son semejantes.

$$\frac{6}{x} = \frac{6{,}75}{9} \rightarrow x = 8 \text{ km}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{6{,}75}{9} \rightarrow y = 7{,}5 \text{ km}$$

5. En una esfera de diámetro 18 cm, se inscribe un cono cuya altura es 6 cm. ¿Cuánto medirá el radio de la base del cono?



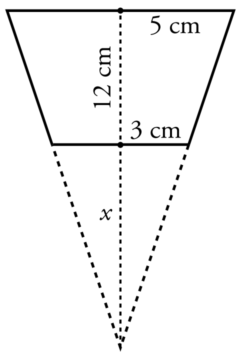
El triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en $\hat{B}$.

El radio del cono, r, es la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$.

Utilizando el teorema de la altura:

$r^2 = 6 \cdot 12 \;\rightarrow\; r = \sqrt{72} \approx 8{,}49$ cm

6. Tenemos un vaso con forma de tronco de cono en el que los diámetros de las bases miden 10 cm y 6 cm y su altura es de 12 cm. Si lo llenamos, ¿cabe más de medio litro de agua, o menos?



$$\frac{12 + x}{x} = \frac{5}{3} \;\rightarrow\; 5x = 36 + 3x \;\rightarrow\; 2x = 36 \;\rightarrow\; x = 18$$

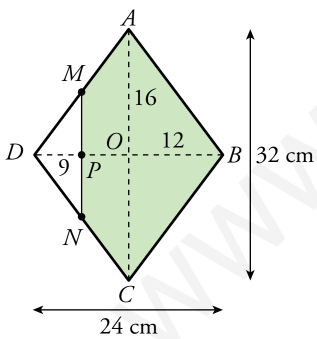
$$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (12 + 18) = 250\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 54\pi \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{VASO}} = 250\pi - 54\pi = 196\pi \approx 615{,}75 \text{ cm}^3$$

En el vaso cabe más de medio litro de agua.

7. Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32$ cm y $\overline{BD} = 24$ cm. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9$ cm, se traza una paralela a la diagonal AC, que corta en M y N a los lados AD y CD. Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \;\rightarrow\; \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm} \;\rightarrow\; \overline{MA} = 20 - 15 = 5 \text{ cm}$$

Perímetro $MABCN = 2\left(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}\right) = 2(5 + 20 + 12) = 74$ cm

Área pentágono = Área rombo – Área triángulo MND =

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$

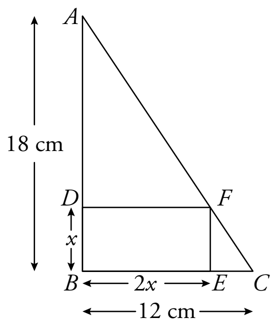
Autoevaluación

1. Queremos hacer una maqueta de un jardín rectangular a escala 1:400. Su perímetro es de 850 m, y su área, de 37 500 m². ¿Cuáles serán estas medidas en la maqueta?

$$\text{Perímetro} = \frac{850}{400} = 2{,}125 \text{ m} = 212{,}5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{37\,500}{400^2} = 0{,}234375 \text{ m}^2 = 2\,343{,}75 \text{ cm}^2$$

2. En un triángulo rectángulo, se inscribe un rectángulo de lados paralelos a los catetos en el que la base mide el doble que la altura. Si los catetos miden 12 cm y 18 cm, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{FEC}$ son semejantes, por lo que podemos afirmar:

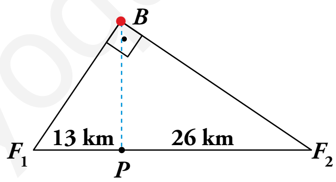
$$\frac{18}{x} = \frac{12}{12-2x} \to 18(12-2x) = 12x \to$$

$$\to 216 - 36x = 12x \to 216 = 48x \to x = 4{,}5 \text{ cm}$$

La altura es de 4,5 cm y la base, 9 cm.

3. Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F_1 y F_2. Desde ese punto, la línea que lo une al puerto P es perpendicular a la costa.

Sabemos que $\overline{PF_1} = 13$ km y que $\overline{PF_2} = 26$ km.



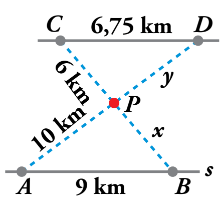
Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.

- Para calcular $\overline{BP}$, aplicamos el teorema de la altura:

  $\overline{BP}^2 = 13 \cdot 26 \to \overline{BP} = 18{,}38$ km

- $\overline{BF}_1^2 = 13 \cdot 26 + 13^2 \to \overline{BF}_1 = 22{,}52$ km
- $\overline{BF}_2^2 = 13 \cdot 26 + 26^2 \to \overline{BF}_2 = 31{,}84$ km

4. Un centro comercial P está situado entre dos vías paralelas r y s. Se quiere unir, mediante carreteras, con las poblaciones A, B, C y D. Con los datos de la figura, calcula x e y.

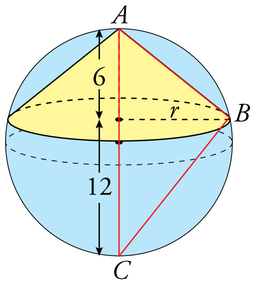


Los triángulos CDP y APB son semejantes.

$$\frac{6}{x} = \frac{6{,}75}{9} \to x = 8 \text{ km}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{6{,}75}{9} \to y = 7{,}5 \text{ km}$$

5. En una esfera de diámetro 18 cm, se inscribe un cono cuya altura es 6 cm. ¿Cuánto medirá el radio de la base del cono?



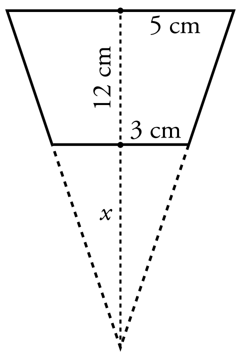
El triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo en $\hat{B}$.

El radio del cono, r, es la altura sobre la hipotenusa de $\widehat{ABC}$.

Utilizando el teorema de la altura:

$r^2 = 6 \cdot 12 \to r = \sqrt{72} \approx 8{,}49$ cm

6. Tenemos un vaso con forma de tronco de cono en el que los diámetros de las bases miden 10 cm y 6 cm y su altura es de 12 cm. Si lo llenamos, ¿cabe más de medio litro de agua, o menos?



$\frac{12 + x}{x} = \frac{5}{3} \to 5x = 36 + 3x \to 2x = 36 \to x = 18$

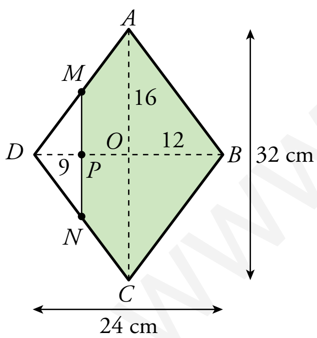
$V_{\text{CONO GRANDE}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot (12 + 18) = 250\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{CONO PEQUEÑO}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 54\pi \text{ cm}^3$

$V_{\text{VASO}} = 250\pi - 54\pi = 196\pi \approx 615{,}75 \text{ cm}^3$

En el vaso cabe más de medio litro de agua.

7. Las diagonales de un rombo miden $\overline{AC} = 32$ cm y $\overline{BD} = 24$ cm. Por un punto P de la diagonal menor, tal que $\overline{PD} = 9$ cm, se traza una paralela a la diagonal AC, que corta en M y N a los lados AD y CD. Calcula el área y el perímetro del pentágono $MABCN$.



Los triángulos AOD y MPD son semejantes. Por ello:

$\frac{16}{12} = \frac{\overline{MP}}{9} \to \overline{MP} = \frac{16 \cdot 9}{12} = 12$ cm

$\overline{AD} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ cm

$\overline{MD} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ cm $\to \overline{MA} = 20 - 15 = 5$ cm

Perímetro $MABCN = 2\left(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{MP}\right) = 2(5 + 20 + 12) = 74$ cm

Área pentágono = Área rombo – Área triángulo MND =

$$= \frac{32 \cdot 24}{2} - \frac{9 \cdot 12}{2} \cdot 2 = 384 - 108 = 276 \text{ cm}^2$$