

1B. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,25 puntos)

b) Asíntotas verticales y oblicuas. (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x - 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x - 2$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. (0,5 puntos)

b) Considera el sistema $A \cdot X = B$, donde A es una matriz 3×4 , $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ y B es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz B ? (0,50 puntos)

c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado? (0,75 puntos)

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz A es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $(A|B)$? (0,75 puntos)

4B. Dados los puntos $P(1, 1, 2)$ y $Q(1, 1, 0)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Ecuación general del plano π que contiene al punto P y a la recta r . (1,25 punto)

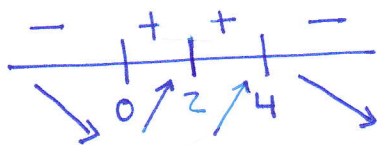
b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos P y Q al plano π calculado en el apartado anterior. (1,25 puntos)

1A) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ (Cuidado que el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$)

a) $f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2-x)^2}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{4x - x^2}{(2-x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \\ (2-x)^2 > 0 \text{ Siempre } (\forall x \in \mathbb{R}) \end{cases}$

$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$



f es $\begin{cases} \text{creciente en } (0, 4) - \{2\} \\ \text{decreciente en } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}$

b) Asíntotas verticales : ¿ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$?

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2-x} = +\infty \Rightarrow \boxed{x=2 \text{ es una asíntota vertical}}$

Asíntotas oblicuas

$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = -1$

$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - m_1 x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2-x} = -2$

La recta $\boxed{y = -x - 2}$ es una asíntota oblicua

¡¡OJO!! El haber puesto $\pm\infty$ en los límites ha sido después de asegurarme de que los límites no dependían de que fuese $+\infty$ o $-\infty$. Si no estamos seguros, primero hay que hacerlo con $+\infty$ y luego con $-\infty$, porque hay funciones que tienen 2 asíntotas oblicuas.

1B) a) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

Vértice: $x_v = \frac{2}{2} = 1$ } $V(1, -3)$
 $y_v = 1^2 - 2 - 2 = -3$

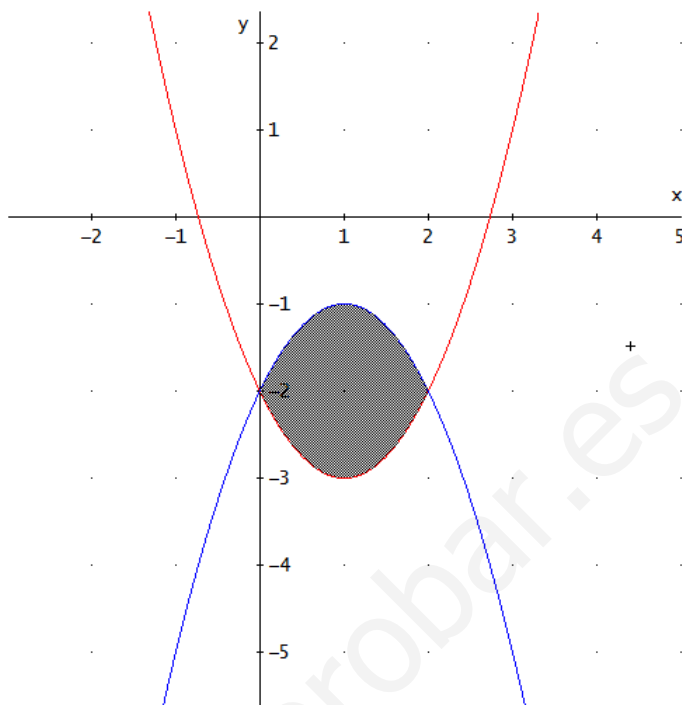
Puntos de corte con OX: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \approx 2,7 \\ \frac{2 - \sqrt{12}}{2} \approx -0,7 \end{cases}$

$$g(x) = -x^2 + 2x - 2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Vértice: } x_v &= \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \\ y_v &= -1^2 + 2 - 2 = -1 \end{aligned} \right\} V(1, -1)$$

No corta al eje OX

| x | 0 | 2 |
|---|----|----|
| y | -2 | -2 |



b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Area}} &= \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^2 ((-x^2 + 2x - 2) - (x^2 - 2x - 2)) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx = \\ &= -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{-2 \cdot 8}{3} + \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{8}{3} u^2 \end{aligned}$$

3A) a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX=B$ es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A , es igual al rango de la matriz ampliada, $(A|B)$.

b) $A_{3 \times 4} X_{4 \times 1} = B$ La dimensión de B es 3×1

c) No, ya que solo hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

d) En principio tenemos dos posibilidades: 1 y 3

Sin embargo, como el rango de la matriz ampliada nunca puede ser menor que el rango de la matriz de coeficientes, el rango de $(A|B)$ es tres.

4A) a) π t. q. $\begin{cases} P \in \pi \\ r \subset \pi \end{cases}$

π está determinado por $\begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{u}_r = \text{vector director de } r \\ \overrightarrow{PR} \text{ donde } R \in r \text{ (tomaremos } R(1,0,0)) \end{cases}$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (2, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{PR} = (1, 0, 0) - (1, 1, 2) = (0, -1, -2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + 4y - 2z - 3 = 0 \equiv \pi}$$

b) Llamamos M al punto medio de P y Q.

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_M &= \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_M &= \frac{2+0}{2} = 1 \end{aligned} \right\} M(1, 1, 1)$$

$$\boxed{d(M, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29} u}$$