

1B. Sabiendo que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

tiene un punto crítico en $(1, 1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo. **(2,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} mx & & + & z & = & 1 \\ & my & + & z & = & m \\ -mx & - & my & + & (m+1)z & = & -m-1 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de π y r . **(1,25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0, 1, -1)$. **(1,25 puntos)**

$$1B) f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

f tiene un punto crítico (punto en el que $f' = 0$) en $(1, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-a - 2b + a}{2^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2b}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \left. \vphantom{f'(1)} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2$$

Por tanto, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Ahora hay que comprobar que $x=1$ es un máximo relativo:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ es un máx. relativo de } f.}$$

$$2B) a) f(x) = x^2$$

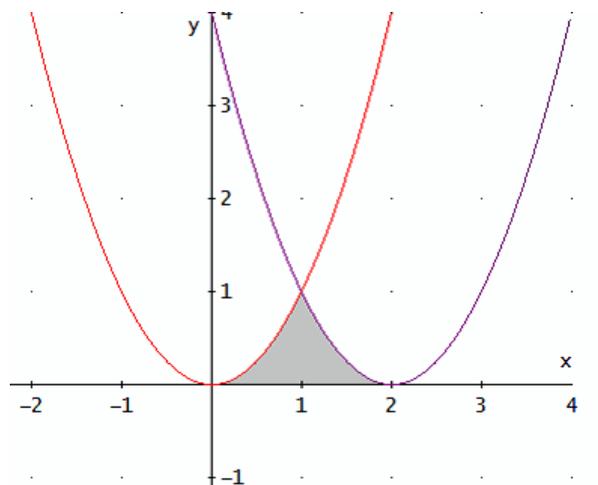
$$\text{Vértice: } \begin{cases} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\text{Vértice}} \right\} V(0,0)$$

$$\text{Tabla: } \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{Vértice: } \begin{cases} x_v = \frac{4}{2} = 2 \\ y_v = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\text{Vértice}} \right\} V(2,0)$$

$$\text{Tabla: } \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 4 \end{array}$$



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Área

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right|_1^2 \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{4 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4 \cdot 1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) \right] = \\ &= \boxed{\frac{2}{3} u^2} \end{aligned}$$

$$3B) \left\{ \begin{array}{l} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)z = -m-1 \end{array} \right\} M = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = m^2(m+3) \Rightarrow |M| = 0 \Leftrightarrow m = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

Si $\boxed{m \neq 0, -3} \Rightarrow \text{rango } M = \text{rango } \tilde{M} = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$
 \Rightarrow sistema compatible determinado.

Si $\boxed{m = -3}$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{rango } M = \text{rango } \tilde{M} = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

Si $\boxed{m = 0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1 + F_3]{-F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = -2 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $m = -3$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{De } [2]: -3y + z = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}z + 1 \\ \text{Sustituimos en } [1]: -3x + z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Hacemos $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Las soluciones son $\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\lambda + 1, \lambda \right)}$

$$4B) \pi \equiv y - z = 3, \quad r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Posición relativa

$$\left. \begin{aligned} \vec{n}_\pi &= (0, 1, -1) \\ \vec{u}_r &= (2, 1, 1) \end{aligned} \right\}$$

$$\pi \equiv y - z - 3 = 0$$

Sustituimos $\vec{u}_r = (2, 1, 1)$ en la ec. del plano:

$$+1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{sustituimos } P(0, 1, -1) \in r \text{ en la ec.}$$

completa del plano $1 - 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow$ r y π son paralelos

De otra forma: mediante rangos

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y-1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = z+1 \Rightarrow x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} |M| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{r y } \pi \text{ son paralelos}$$

b) La recta s que nos piden está determinada por $P(0, 1, -1)$ y el vector director $\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r$

$$\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2, -2, -2)$$

Unas ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = +2\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = -1 - 2\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$