1A. Determina el valor del parámetro $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}, a > 1}$, de forma que el área del triángulo de vértices $\boldsymbol{A(0,0), B(0,a)}$ y $\boldsymbol{C(\frac{a}{a-1},0)}$ sea mínima. (2,5 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \boldsymbol{x \ln(x)\, dx}$. (Indicación: $\boldsymbol{\ln(x)}$ representa el logaritmo neperiano de $\boldsymbol{x}$). (1,25 puntos)

b) $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx}$. (1,25 puntos)

3A. a) Despeja $\boldsymbol{X}$ de la ecuación matricial $\boldsymbol{X \cdot B - I = X \cdot A + A}$, donde $\boldsymbol{X, B, A}$ e $\boldsymbol{I}$ son matrices de tipo $\boldsymbol{3 \times 3}$. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz $\boldsymbol{X}$ de tamaño $\boldsymbol{3 \times 3}$, solución de la ecuación, siendo $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$, $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ e $\boldsymbol{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$. (1,25 puntos)

4A. a) Analiza, en función del parámetro $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\boldsymbol{\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0}$, $\boldsymbol{\pi_2 \equiv y + z = m}$ y $\boldsymbol{\pi_3 \equiv mx + y - z = 8}$. (1,25 puntos)

b) Razona que, independientemente del valor del parámetro $\boldsymbol{m}$, los planos $\boldsymbol{\pi_2}$ y $\boldsymbol{\pi_3}$ son perpendiculares. (1,25 puntos)

1A) $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = (0,a)-(0,0) = (0,a) \\ \vec{AC} = \left(\frac{a}{a-1},0\right)-(0,0) = \left(\frac{a}{a-1},0\right)\end{array}\right\} \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{a}{a-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{a-1}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$S = A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{a-1} = S(a)$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\,\frac{2a(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-2a}{(a-1)^2}$$

$$S''(a) = \frac{1}{2}\,\frac{(2a-2)(a-1)^2-2(a^2-2a)(a-1)}{(a-1)^4}$$

$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2-2a=0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0 & \text{No es solución} \\ 2 \end{cases}$$

$$S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a=2}\ \text{en un mínimo relativo}$$

1B) a) $$\int x\ln x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\ln x \rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \rightarrow & v = \frac{x^2}{2}\end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

b) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} t=\sqrt{x} \rightarrow & t^2 = x \\ & dx = 2t\,dt\end{array}\right] = \int \frac{t}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\left(\int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt\right) = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) =$$

$$= \boxed{2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+1 \\ \hline -t^2-t & t-1 \\ \hline -t & \\ t+1 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}$$

3A) a) $XB - XA = A + I \Rightarrow X(B-A) = A + I \Rightarrow$

$$\Rightarrow X(B-A)(B-A)^{-1} = (A+I)(B-A)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A+I)(B-A)^{-1}}$$

b) Cálculo de $B-A$

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(B-A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A+I$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X} = (A+I)(B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4A) a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv \quad y + z = m \\ \pi_3 \equiv mx + y - z = 8 \end{cases}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

$$|M| = -2 - m - 2 = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

Si $\boxed{m \neq -4} \Rightarrow$ rango $M = 3 =$ rango $\tilde{M} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto

Si $\boxed{m = -4}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1+F_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}\right\}$$ Sistema incompatible

π_1 y π_2 no son paralelos ya que $\frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1}$

π_1 y π_3 " " " ya que $\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{1}$

π_2 y π_3 " " " ya que $\frac{0}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por tanto, los tres planos se cortan dos a dos según tres rectas.