<u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x\geq -1\\[2ex] \dfrac{2x}{x-1} & si \quad x<-1\end{cases}$$

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 3 puntos.

a) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+2x}\right)$

b) Se considera la función $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$. Se pide calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

<u>Ejercicio</u> 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{xe^x+e^x}$$

a) (0.5 puntos) Calcular el dominio de $f(x)$.

b) (1.5 puntos) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=0$.

<u>Ejercicio</u> 4. Calificación máxima: 2 puntos.

Obtener el dominio de la función $f(x)=ln\,(x^3+2x^2-x-2)$

Ejercicio 1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+1}{x} & si \quad x \geq -1 \\[2ex] \dfrac{2x}{x-1} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

- (0.75p) Continuidad de $f(x)$ en $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = \frac{1-3+1}{-1} = 1$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$f(-1) = \frac{1-3+1}{-1} = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 1$, $f(x)$ es continua en $x = -1$.

- (1.25p) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = -1$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x+3)\cdot x - (x^2+3x+1)\cdot 1}{x^2} & si \quad x \geq -1 \\[2ex] \dfrac{2\cdot(x-1) - 2x\cdot 1}{(x-1)^2} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x-x^2-3x-1}{x^2} & si \quad x \geq -1 \\[2ex] \dfrac{2x-2-2x}{(x-1)^2} & si \quad x < -1 \end{cases} \quad \to \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2} & si \quad x \geq -1 \\[2ex] \dfrac{-2}{(x-1)^2} & si \quad x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = 0 \neq \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = -1/2$, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Para $x = 0$ se anula el denominador de la función definida para $x \geq -1$, luego habrá que estudiar la continuidad y derivabilidad de la función en dicho punto.

- (0.75p) Continuidad de $f(x)$ en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+3x+1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$f(0) = \frac{0^2 + 3 \cdot 0 + 1}{0} = \frac{1}{0} = \nexists$$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 0$.

- (0.25p) Derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$:

  Por ser $f(x)$ discontinua en $x = 0$, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Ejercicio 2.

a) Calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 2x}\right)$

b) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$. Se pide calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$.

SOLUCIÓN

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 2x}\right) = \infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{4x^2 + 2x}\right)\left(2x + \sqrt{4x^2 + 2x}\right)}{2x + \sqrt{4x^2 + 2x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)^2 - \left(\sqrt{4x^2 + 2x}\right)^2}{2x + \sqrt{4x^2 + 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + 2x)}{2x + \sqrt{4x^2 + 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 2x}{2x + \sqrt{4x^2 + 2x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x + \sqrt{4x^2 + 2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{2x + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{4x} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) Como el límite del exponente es del tipo $k/0$, se calculan los límites laterales en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = \nexists$$

Ejercicio 3. Dada la función $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{xe^x+e^x}$$

a) Calcular el dominio de $f(x)$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x=0$.

SOLUCIÓN

a) Buscamos los valores que anulan el denominador:

$$xe^x+e^x=0 \quad\rightarrow\quad e^x(x+1)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} e^x=0 & \rightarrow \quad \nexists \\ x+1=0 & \rightarrow \quad x=-1 \end{cases}$$

$$Dom\ f(x)=x\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

b) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es: $y-y_0=m(x-x_0)$

$$x_0=0 \quad\rightarrow\quad y_0=f(0)=\frac{1}{0\cdot e^0+e^0}=\frac{1}{1}=1$$

$$f'(x)=\frac{(1)'\cdot(xe^x+e^x)-1\cdot(xe^x+e^x)'}{(e^x+xe^x)^2}=\frac{-(e^x+xe^x+e^x)}{(e^x+xe^x)^2} \quad\rightarrow$$

$$m=f'(0)=\frac{-(1+0+1)}{(1+0)^2}=\frac{-2}{1}=-2$$

Sustituyendo:

$$y-1=-2(x-0) \quad\rightarrow\quad y-1=-2x \quad\rightarrow\quad y=-2x+1$$

<u>Ejercicio</u> 4. Obtener el dominio de la función $f(x) = ln\ (x^3 + 2x^2 - x - 2)$

<u>SOLUCIÓN</u>

El dominio de la función será la solución de la inecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0$ **(I).**

Buscamos las raíces de la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$. Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

La primera de las raíces buscadas es $x_1 = 1$.

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x_3 = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$x_4 = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \rightarrow \quad x_3 = -2$$

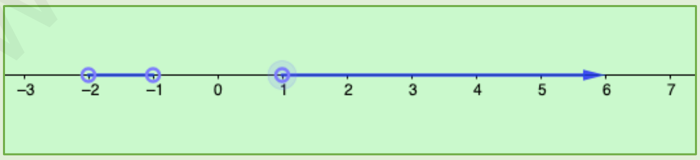
Situamos las raíces obtenidas sobre la recta real y comprobamos si un valor de cada intervalo verifica o no la inecuación **(I):**

$x = -3 \quad \rightarrow \quad -27 + 18 + 3 - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -8 \geq 0$ NO

$x = -1{,}5 \quad \rightarrow \quad 3{,}375 + 4{,}5 + 1{,}5 - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 0{,}625 \geq 0$ SÍ

$x = 0 \quad \rightarrow \quad -2 \geq 0$ NO

$x = 2 \quad \rightarrow \quad 8 + 8 - 2 - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 12 \geq 0$ SÍ



$Dom\ f(x) = (-2, -1) \cup (1, +\infty)$