<u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 5 puntos.
Dadas la matrices dependientes del parámetro real m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m+1 \\ 3 & -2 & m-4 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} -1 & m \\ m & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Estudiar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.
b) (3 puntos) Para $m = 0$, resolver la ecuación matricial $AX = BB^t$.

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 5 puntos.
Dado el sistema:

$$\begin{cases} mx + \quad my + 2z = \quad m \\ \quad x + (m-2)y \qquad = -1 \\ \qquad\qquad 2y + 2z = \quad 2 \end{cases}$$

se pide:

a) (3 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m.
b) (2 puntos) Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

Ejercicio 1. Dadas la matrices dependientes del parámetro real m:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m+1 \\ 3 & -2 & m-4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & m \\ m & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Estudiar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

b) Para $m = 0$, resolver la ecuación matricial $AX = BB^t$.

Solución.-

a) La matriz A tendrá inversa si $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m+1 \\ 3 & -2 & m-4 \end{vmatrix} = m - 4 - 4m + 3m + 3 - (3m - 2m - 2 + 2m - 8) = -1 - (3m - 10) =$$

$$= -1 - 3m + 10 = -3m + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 3m = 9 \quad \rightarrow m = 3$$

La matriz A tiene inversa si $m \neq 3$.

b) Para $m = 0$, las matrices A y B son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}BB^t \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}BB^t \quad \textbf{(I)}$$

Obtenemos la inversa de la matriz A:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 3 - (-2 - 8) = -1 + 10 = 9$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -7 \\ 4 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AdjA)^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en **(I):**

$$X = A^{-1}BB^t = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2-1 & 4+2 & 2+8+5 \\ 11+1 & -4-2 & -11-8-5 \\ -7+1 & 5-2 & 7+10-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 15 \\ 12 & -6 & -24 \\ -6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 4/3 & -2/3 & -8/3 \\ -2/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Dado el sistema:

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

Solución.-

a) Estudiamos el rango de la matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} m & m & 2 & m \\ 1 & m-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m-2) + 4 - 2m = 2m^2 - 4m + 4 - 2m = 2m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} =$$

$$m_1 = \frac{6+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m_2 = \frac{6-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Para $\boldsymbol{m \neq \{1, 2\}}$, $\boldsymbol{rg(M^*) = 3}$

Para $m = 1$, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 - (-2 + 2) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-2 + 4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 - (-2 + -4) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Para $\boldsymbol{m = 1}$, $\boldsymbol{rg(M^*) = 2}$

Para $m = 2,\ M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-4+4) = 4 \neq 0$$

Para $\boldsymbol{m = 2,\ rg(M^*) = 3}$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes $M = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad m = \{1, 2\}$$

Para $\boldsymbol{m \neq \{1, 2\},\ rg(M) = 3}$

Para $m = 1,\ \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Para $\boldsymbol{m = 1,\ rg(M) = 2}$

Para $m = 2,\ M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 = -2 \neq 0$$

Para $\boldsymbol{m = 2,\ rg(M) = 2}$

Para $m \neq \{1, 2\},\ rg\ (M) = rg(M^*) = 3$ (nº incógnitas) $\rightarrow$ Sistema compatible determinado

Para $m = 1,\ rg\ (M) = rg(M^*) = 2 < 3$ (nº incógnitas) $\rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Para $m = 2,\ rg\ (M) \neq rg(M^*)$ $\rightarrow$ Sistema incompatibl

b) Para $m = 5$, el sistema es compatible determinado, luego tendrá solución única. Resolviéndolo por Cramer:

$$M^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}5 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad |M| = 30+4-10=24$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{30-4-(12-10)}{24}=\frac{24}{24}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 5 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{-10+4-10}{24}=\frac{-16}{24}=-\frac{2}{3}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}5 & 5 & 5\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}}{|M|}=\frac{30+10-(-10+10)}{24}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$$

Los tres planos se cortan en el punto $A(1,-2/3,-5/3)$