<u>Ejercicio</u> 1. Calificación máxima: 4 puntos.
Dadas las matrices:

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2.5 puntos) Calcular la matriz A^{-1} inversa de A y resolver la ecuación matricial $XA = 4C$.
b) (1.5 puntos) Obtener el determinante de la matriz $D = (A - BC)^2$.

<u>Ejercicio</u> 2. Calificación máxima: 6 puntos.
Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a+1 & 4 \\ a+1 & a^2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $P = B^t A^t$? Para $a = 0$, obtener la matriz inversa P^{-1} de P.
b) (2 puntos) Determinar para qué valores de a es invertible la matriz $Q = BA - I$, siendo I la matriz identidad.
c) (2 puntos) Determinar para qué valores de a la matriz C no admite inversa.

Ejercicio 1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcular la matriz A^{-1} inversa de A y resolver la ecuación matricial $XA = 4C$.

b) Obtener el determinante de la matriz $D = (A - BC)^2$.

Solución.-

a) La matriz inversa viene dada por la expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 - 1 = -4$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación, por la derecha, por A^{-1}:

$$XAA^{-1} = 4CA^{-1} \quad \rightarrow \quad X = 4CA^{-1}$$

$$X = 4\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -1+2-3 & -2-6 & 5-2+3 \end{pmatrix} =$$

$$= -1\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

b) La matriz BC será una matriz de dimensión $3x3$:

$$BC = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Llamamos D a la matriz $A - BC$:

$$D = A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz D^2 se obtiene multiplicando la matriz D por sí misma:

$$D^2 = D \cdot D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -7+28 \\ -1 & -1 & 7-4 \\ 1 & 4 & -1+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 21 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Obtenemos su determinante:

$$|\,\mathrm{D}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 21 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix} = -15 - 84 + 21 - (-21 + 12 - 105) = -78 - (-114) = -78 + 114 =$$

$$= 36$$

<u>Ejercicio</u> 2. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a+1 & 4 \\ a+1 & a^2 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $P = B^t A^t$? Para $a = 0$, obtener la matriz inversa P^{-1} de P.

b) Determinar para qué valores de a es invertible la matriz $Q = BA - I$, siendo I la matriz identidad.

c) Determinar para qué valores de a la matriz C no admite inversa.

<u>Solución</u>.-

a) Sea la matriz P:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1+2a \\ -a+a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1+2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz P sea invertible $|\,P\,| \neq 0$.

$$|\,P\,| = \begin{vmatrix} 1+a & 1+2a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a = 0 \quad \rightarrow \quad a = -1$$

Luego la matriz P es invertible para $a \neq -1$

Para $a = 0$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$|\,P\,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$AdjC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa de C es:

$$C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Sea la matriz Q:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 1 & -a+a & 2a \\ -1 & a+1 & 2 \\ -a & a^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a \\ -1 & a & 2 \\ -a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz D sea invertible $|\,D\,| \neq 0$.

$$|\,Q\,| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a \\ -1 & a & 2 \\ -a & a^2 & -1 \end{vmatrix} = -2a^3 - (-2a^3) = \; -2a^3 + 2a^3 = 0$$

La matriz Q nunca es invertible pues su determinante siempre vale 0 independientemente del valor de a.

c) Si la matriz C no admite inversa, entonces $|\,C\,| = 0$.

$$|\,C\,| = \begin{vmatrix} a+1 & 4 \\ a+1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3 + a^2 - 4a - 4 = 0$$

Resolvemos la ecuación de tercer grado aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Luego $a_1 = 2$

Obtenemos las otras dos raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$a^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad a = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_{3=} - 2 \end{cases}$$

La matriz C no admite inversa para $a = \; \{-2, -1, 2\,\}$