

1. Resuelve las siguientes integrales. Son inmediatas, pero puedes calcularlas por cualquier otro método.

a) $\int \sqrt{x^4 - 5x^2} dx$ [1 punto]

b) $\int \frac{x^2}{4+x^6} dx$ [1 punto]

2. [2 puntos] Resuelve las siguientes integrales usando o bien el método de integración por cambio de variable, o bien el método de integración por partes.

a) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ [1,5 puntos]

b) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ [1,5 puntos]

3. Resuelve las siguientes integrales racionales.

a) $\int \frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2(5x+6)} dx$ [1,5 puntos]

b) $\int \frac{x-5}{x^3+x^2-x-1} dx$ [1,5 puntos]

4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$

a) Realiza un dibujo aproximado de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g . [0,5 puntos]

b) Calcula el área de la región anterior. [1,5 puntos]

Soluciones

1. Integrales inmediatas

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sqrt{x^4 - 5x^2} dx &= \int \sqrt{x^2(x^2 - 5)} dx = \int x\sqrt{x^2 - 5} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2 - 5)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 5)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 5)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{\sqrt{(x^2 - 5)^3}}{3} + C = \frac{(x^2 - 5)\sqrt{x^2 - 5}}{3} + C \\ \text{b) } \int \frac{x^2}{4+x^6} dx &= \int \frac{x^2}{4+(x^3)^2} dx = \int \frac{x^2/4}{1+(x^3)^2/4} dx = \int \frac{x^2/4}{1+(x^3/2)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^2}{1+(x^3/2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{3x^2/2}{1+(x^3/2)^2} dx = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C \end{aligned}$$

2. Integrales por cambio de variable y por partes

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \left. \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} dt \Rightarrow dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{\ln t^2}{t} 2t dt = \int \frac{2 \ln t}{t} 2t dt = 4 \int \ln t dt = \\ &= 4(t \ln t - t) + C = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \sqrt{x}) + C = 4\left(\frac{\sqrt{x}}{2} \ln x - \sqrt{x}\right) + C = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C \\ \text{b) } \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x ; du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} ; v = \operatorname{tg} x \end{array} \right] = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \\ &= x \operatorname{tg} x - (-\ln(\cos x)) + C = x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + C \end{aligned}$$

3. Integrales racionales

a) Realizando la división: $2x^3 - 9x^2 + 9x + 6 = (2x+1)(x^2 - 5x + 6) + 2x$. Entonces el integrando se puede escribir así: $\frac{2x^3 - 9x^2 + 9x + 6}{x^2 - 5x + 6} = 2x + 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$.

Además, como las raíces del denominador de la expresión $\frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$ son $x=2$ y $x=3$, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A=- \\ B=6 \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2} dx = \int (2x+1) dx - 4 \int \frac{1}{x-2} dx + 6 \int \frac{1}{x-3} dx = x^2 + x - 4 \ln(x-2) + 6 \ln(x-3) + C$$

b) La factorización del polinomio $x^3 + x^2 - x - 1$ es $(x-1)(x+1)^2$. Descompongamos pues la fracción

$$\frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} \text{ en fracciones simples.}$$

$$\frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

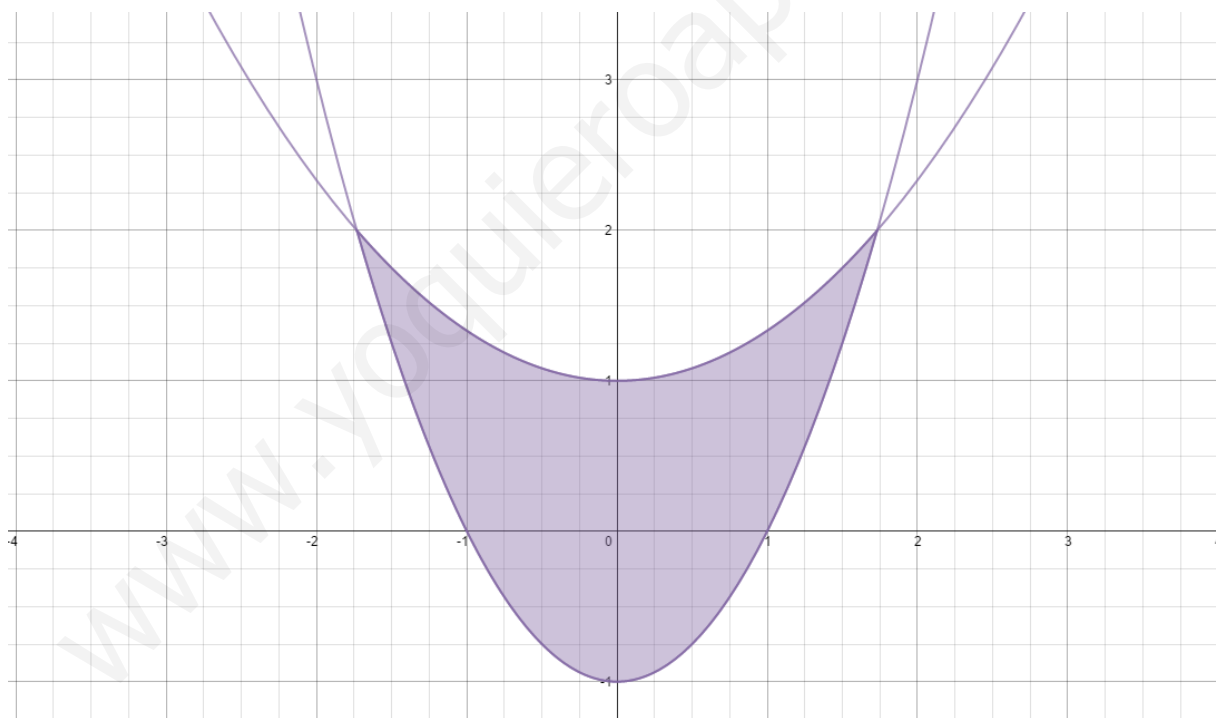
Igualando los numeradores: $x-5 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$.

- Si $x = -1$, tenemos que $-6 = -2C \Rightarrow C = 3$.
- Si $x = 1$, tenemos que $-4 = 4A \Rightarrow A = -1$.
- Y si $x = 0$, tenemos que $-5 = -1 - B - 3 \Rightarrow B = 1$.

Por tanto: $\frac{x-5}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$, es decir:

$$\int \frac{x-5}{x^3 + x^2 - x - 1} dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + 3 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\ln|x-1| + \ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C$$

4. La representación de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g es:



Calculemos la coordenada x o abscisa de los puntos de corte de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow 3x^2 - 3 = x^2 + 3 \Rightarrow 2x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

De las dos funciones, la que está por encima es g , con lo que el área de la región será:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (g(x) - f(x)) dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{1}{3}x^2 + 1 \right) - (x^2 - 1) \right] dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{3}x^2 + 2 \right) dx = \left[-\frac{2}{9}x^3 + 2x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \left(-\frac{2}{9}\sqrt{3}^3 + 2\sqrt{3} \right) - \left(\frac{2}{9}\sqrt{3}^3 - 2\sqrt{3} \right) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}^3 + 4\sqrt{3} = -\frac{4}{3}\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3} \text{ uds}^2 \cong 4,62 \text{ uds}^2 \end{aligned}$$