

Análisis

1) Hallar el dominio de $y = \sqrt{-3x^2 + 4x - 1}$ (2 puntos)

2) Decir si la siguiente función es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas:

$$y = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2 - 1} \quad (2 \text{ puntos})$$

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x) = \frac{4x - 1}{2x - 2}$. (2 puntos)

4) Calcular: (4 puntos)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{4x^3 - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x - 1} - \frac{x^2 + 3}{x + 1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

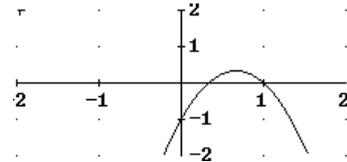
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{4x - 2}$

Soluciones

1) Hallar el dominio de $y = \sqrt{-3x^2 + 4x - 1}$

Los polinomios dan resultado para cualquier valor de x . Pero las raíces cuadradas exigen que el radicando sea mayor o igual que 0. Luego $x \in D(f) \Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 \geq 0$. Para resolver esta inecuación, dibujamos la parábola $y = -3x^2 + 4x - 1$. Como el coeficiente de x^2 es negativo (-3), se abre hacia abajo, con un máximo. Corta al eje OX en: $-3x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-6} = \frac{-4 \pm 2}{-6} = \begin{cases} = \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Su gráfica será:}$$



Luego los valores de x que hacen que la y sea positiva, que son la solución de la inecuación (porque hemos llamado y a $-3x^2 + 4x - 1$, y la inecuación es $-3x^2 + 4x - 1 \geq 0$) y, por tanto, el dominio, son: $D(f) = [\frac{1}{3}, 1]$

2) Decir si la siguiente función es par, impar o ninguna de las dos cosas:

$$y = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow f(-x) = \frac{2(-x)^4 - 3(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow \text{Es par}$$

3) Hallar las intersecciones con los ejes y el dominio de $f(x) = \frac{4x-1}{2x-2}$.

La única operación que presenta restricciones en el cálculo de la imagen, de entre las que aparecen en f , es la división, porque no se puede dividir entre 0. Por tanto, no pertenecen al dominio los valores de x que anulen el denominador, esto es: $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Es decir: $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Intersección con OX: $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4x-1}{2x-2} \Rightarrow 0 = 4x-1 \Rightarrow 1 = 4x \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (observar que es solución, porque no anula el denominador; además, los puntos que anulan el denominador estaban excluidos del dominio) $\Rightarrow (\frac{1}{4}, 0)$ son las coordenadas de la intersección.

Intersección con OY: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2})$

4) Calcular:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{4x^3 - 2} = +\infty$, porque la exponencial de base mayor que 1 crece mucho más rápidamente que cualquier polinómica, por lo que el numerador produce un infinito de orden superior al del denominador.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x-1} - \frac{x^2+3}{x+1} \right) &= \text{(en principio, produce la indeterminación } \infty - \infty \text{)} = \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2-3)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x^2+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^3+x^2-3x-3) - (x^3-x^2+3x-3)}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+x^2-3x-3-x^3+x^2-3x+3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-6x}{x^2-1} \right) = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4}$ Produce la indeterminación 0/0. Descomponemos por Ruffini, probando en $x=2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -5 & -4 & 4 \\ 2 & & 6 & 2 & -4 \\ \hline & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 5x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x^2 + x - 2)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + x - 2}{x-2} = \frac{12 + 2 - 2}{2 - 2} = \infty$ sin signo; calculando los límites laterales se vería cuando es $+\infty$ y cuando $-\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x}}{4x - 2}$ = (en el ∞ , equivale a quedarse sólo con los sumandos de máxima potencia) = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8} \sqrt[3]{x^3}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$