

ÁLGEBRA

1. (CMS09)

a) (2,5 puntos) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbf{R}$, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

b) (1 punto) Resuélvelo para $\lambda = 0$, si es posible.

2. (EXJ09) Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$.

Calcule los siguientes determinantes, indicando en cada caso las propiedades utilizadas:

a) (0,75 puntos) $|2A|$.

b) (0,75 puntos) $|A^{-1}|$

c) (0,5 puntos) $|A \cdot A^t|$ (A^t es la traspuesta de la matriz A).

d) (0,5 puntos) Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A .

e) (0,5 puntos) Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

3. (CBS09) Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ m & 2 \end{pmatrix}$, donde $m \in \mathbf{R}$.

a) (1,25 puntos) Determina el rango de la matriz BA .

b) (1 punto) Determina los valores de m para los que la matriz $(AB)^t$ es regular (invertible).

c) (1,25 puntos) Para $m = 0$ calcula una matriz X tal que $(AB)^t X = I$, siendo I la matriz identidad.

Para subir nota. (Cada respuesta correcta sube 1 punto la calificación que tenías.)

1. (NAJ09) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ -x + ay + az = 2a + 1 \\ x + y + (a^3 - 2a)z = a - 1 \end{cases}$$

2. (PVS09) Para cada x se define la matriz $A(x)$ como sigue

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular razonadamente el determinante de la matriz $A(x)$.

3. La pregunta 3 de arriba.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II (Recuperación)**Soluciones:**

1. Se consideran las matrices A y M , siendo A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada con los términos independientes. El sistema es compatible cuando dichas matrices tienen el mismo rango; en caso contrario, el sistema no tiene solución.

$$\text{Con esto: } A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & \lambda & 1 \end{array} \right) = M$$

El determinante de A ,

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 6\lambda - 5\lambda + 9 - 1 = 3\lambda^2 - 11\lambda + 8 = (\lambda - 1)(3\lambda - 8)$$

Este determinante vale 0 si $\lambda = 1$ o $\lambda = 8/3$.

Con esto:

- Si $\lambda \neq 1$ y $8/3 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = 1$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) = M$

El rango de A es 2.

Para ver el rango de M calculamos: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto, el rango de M también vale 2.

Luego, si $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

- Si $\lambda = 8/3$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 8/3 & 1 \end{array} \right) = M$

El rango de A es 2.

Para ver el rango de M calculamos: $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8/3 \end{vmatrix} = -10$. Por tanto, el rango de M vale 3.

Luego, si $\lambda = 8/3$ el sistema es incompatible.

b) Para $\lambda = 0$ el sistema inicial queda
$$\begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow E2 + 3E1 \begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 6y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 2 \\ 5x + 6y = 6 \\ 4x = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{4} \rightarrow -\frac{15}{4} + 6y = 6 \Rightarrow y = \frac{13}{8} \rightarrow \frac{13}{8} - z = 2 \Rightarrow z = -\frac{3}{8}$$

2. Se aplicarán las siguientes propiedades de los determinantes:

(1) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.

(2) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

(3) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta otra fila cualesquiera.

(4) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número.

(5) Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, entonces: $|kA| = k^n |A|$.

(6) El determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

a) Por la propiedad (5), como A es de orden 3, $|2A| = 2^3 |A| = 8 \cdot 2 = 16$

b) Aplicamos que $A \cdot A^{-1} = I$ y la propiedad (6). Por tanto:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow 2|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{2}$$

c) Aplicamos las propiedades (1) y (5).

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = 2 \cdot 2 = 4$$

d) Por la propiedad (2), el nuevo determinante valdrá -2 .

e) Por la propiedad (3), el nuevo determinante seguirá valiendo 2.

$$3. a) \text{ La matriz } BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ m & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & m & 2m+2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Su determinante vale: } |BA| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ m & m & 2m+2 \end{vmatrix} = m(-2m-2+2m) + 2m = 0.$$

Como el determinante vale 0, el rango de BA es menor que 3, independientemente del valor de m .

Como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de BA es 2 para cualquier valor de m .

$$b) AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ m & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2m & 3 \\ m & m+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} -1+2m & m \\ 3 & m+2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz será inversible cuando su determinante sea distinto de 0.

Como $\begin{vmatrix} -1+2m & m \\ 3 & m+2 \end{vmatrix} = 2m^2 - 2$ se anula cuando $m = -1$ o $m = 1$, la matriz será invertible para cualquier valor de $m \neq \pm 1$.

c) Para $m = 0$ la matriz $(AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Esta matriz es inversible y su inversa es

$$\left((AB)^t \right)^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta inversa se calcula aplicando la fórmula $M^{-1} = \frac{1}{|M|} (M_{ij})^t$, siendo (M_{ij}) la matriz de los

adjuntos de M . En este caso, $(M_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; y $|M| = -2$.

La ecuación $(AB)^t X = I \Leftrightarrow X = \left((AB)^t \right)^{-1}$. Por tanto, $X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Para subir nota

1. Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible cuando el rango de A sea igual al de M : $r(A) = r(M)$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{array} \right) = M \Leftrightarrow (\text{Transformaciones de Gauss})$$

$$\Leftrightarrow A = F2 + F1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 2a+1 \\ F3 - F1 & 0 & 0 & a^3 - a \end{array} \right) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - az = 0 \\ (a+1)y = 2a+1 \\ (a^3 - a)z = a-1 \end{cases}$$

Hacemos el determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 - a \end{vmatrix} = (a+1)(a^3 - a) = a(a+1)^2(a-1)$$

Este determinante vale 0 si $a = 0$, $a = -1$ o $a = 1$

Con esto:

• Si $a \neq 0, -1$ y $1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(M)$. El sistema será compatible determinado.

• Si $a = 0$, se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = M$

Es obvio que el rango de A vale 2, mientras que el de M es 3. Por tanto, en este caso, el sistema es incompatible.

• Si $a = -1$, se tiene $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) = M$

En este caso, también de manera inmediata, se ve que $r(A) = 1$ y $r(M) = 2$. El sistema vuelve a ser incompatible.

- Si $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = M$$

Como ambos rangos son iguales, $r(A) = 2 = r(M)$, el sistema será compatible indeterminado.

Soluciones en los casos de compatibilidad.

- Para $a \neq 0, -1, 1$, despejando escalonadamente se tiene:

$$z = \frac{a-1}{a^3-a} = \frac{1}{a(a+1)}$$

$$y = \frac{2a+1}{a+1}$$

$$x + y - az = 0 \Rightarrow x + \frac{2a+1}{a+1} - a \cdot \frac{1}{a(a+1)} = 0 \Rightarrow x + \frac{2a+1}{a+1} - \frac{1}{a+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2a}{a+1}$$

Nota: Como puede observarse, cuando $a = 0$ o $a = -1$ estas soluciones no tienen sentido.

- Para $a = 1$, el sistema inicial es equivalente a:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 3 \\ 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases}, \text{ cuya solución es } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

2. Para calcular el determinante vamos a realizar algunas transformaciones de Gauss que, como sabemos, lo dejan invariante.

En principio restamos la última fila a todas las demás:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F1-F4 \\ F2-F4 \\ F3-F4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante obtenido por la primera columna, vale:

$$\begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 0 & x-1 & x^2-1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = -(x-1)^3$$