Ejercicio 1.

Extrae factor común para escribir como un producto las siguientes expresiones:

$a)\quad a^2 - a + ab - b$

$b)\quad x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3$

Solución:

No aparece un mismo factor común en todos los sumandos por lo que la extracción la haremos de dos veces.

$a)\quad a^2 - a + ab - b = a(a-1) + b(a-1) = (a-1)(a+b)$

$b)\quad x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = x^2(x+2y) - y^2(x+2y) = (x+2y)(x^2-y^2) = (x+2y)(x+y)(x-y)$

Ejercicio 2.

Realiza las operaciones y simplifica el resultado:

$$a)\quad \frac{2x^2-3x}{2x^3-5x^2-x+6} : \frac{x}{x^2-1}$$

$$b)\quad \frac{4}{x} - \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{x}{x+2}$$

Solución:

$$a)\quad \frac{2x^2-3x}{2x^3-5x^2-x+6} : \frac{x}{x^2-1} = \frac{(2x^2-3x)(x^2-1)}{x(2x^3-5x^2-x+6)} = \frac{x(2x-3)(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-2)(2x-3)} = \frac{\cancel{x}\,\cancel{(2x-3)}\,\cancel{(x+1)}\,(x-1)}{\cancel{x}\,\cancel{(x+1)}\,(x-2)\,\cancel{(2x-3)}} = \frac{x-1}{x-2}$$

Factorizamos $2x^3-5x^2-x+6$. *Si nos encontramos con dificultades, nos limitamos a probar si es divisible entre* $(x+1)$, $(x-1)$ *o* $(2x-3)$, *que son los factores que nos permitirían simplificar la fracción algebraica.*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & 7 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 6 & 0 \\ 2 & & 4 & -6 & \\ \hline & 2 & -3 & 0 & \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 2x^3-5x^2-x+6 = (x+1)(x-2)(2x-3)$$

$$b)\ \frac{4}{x}-\frac{3x+2}{x^2+2x}-\frac{x}{x+2}=\frac{4(x+2)}{x(x+2)}-\frac{3x+2}{x(x+2)}-\frac{x^2}{x(x+2)}=\frac{4x+8-3x-2-x^2}{x(x+2)}=\frac{-x^2+x+6}{x(x+2)}=\frac{\cancel{(x+2)}(-x+3)}{x\cancel{(x+2)}}=\frac{3-x}{x}$$

$$mcm(x,\ x+2,\ x^2+2x)=x^2+2x \qquad -x^2+x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r|rrr} & -1 & 1 & 6 \\ -2 & & 2 & -6 \\ \hline & -1 & 3 & 0 \end{array} \quad (x+2)(-x+3)$$

Ejercicio 3.

Dada una cuerda, la cortamos en dos trozos iguales de longitud x cm. Con uno de los trozos construimos un cuadrado y, con el otro, un círculo. Comprueba cuál de las dos figuras tiene mayor área.

Solución:

Tenemos x cm para construir un cuadrado y otros x cm para un círculo.

$$\text{Perímetro del cuadrado}=x \Rightarrow \text{lado del cuadrado}=\frac{x}{4} \Rightarrow A_{cuadrado}=\left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow A_{cuadrado}=\frac{x^2}{16}\ cm^2$$

$$\text{Perímetro del círculo}=x \Rightarrow 2\pi r=x \Rightarrow r=\frac{x}{2\pi} \Rightarrow A_{círculo}=\pi r^2=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2=\frac{\pi x^2}{4\pi^2} \Rightarrow A_{círculo}=\frac{x^2}{4\pi}\ cm^2$$

$$\text{Como } 4\pi<16 \Rightarrow \frac{x^2}{4\pi}>\frac{x^2}{16} \Rightarrow \text{para el mismo perímetro } A_{círculo}>A_{cuadrado}$$

Ejercicio 4.

Sean los polinomios: $p(x)=6x^4+11x^3+3x^2-3x-1$ y $q(x)=x^5+2x^4+2x^3-3x-2$. Se pide:

- Encuentra las raíces del polinomio $p(x)$.
- Calcula la descomposición en factores primos del polinomio $q(x)$.
- Calcula el $MCD\left[p(x)\ ,\ q(x)\right]$.

Solución:

$$p(x)=6x^4+11x^3+3x^2-3x-1 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 11 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & & -6 & -5 & 2 & 1 \\ \hline & 6 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & & -6 & 1 & 1 & \\ \hline & 6 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$6x^4+11x^3+3x^2-3x-1=(x+1)^2(6x^2-x-1)$$

Veamos si el polinomio $6x^2-x-1$ *es primo. Para ello, resolvemos la ecuación* $6x^2-x-1=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-1)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 5}{12}=\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \ 6x^2-x-1=6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x+1)$$

Por tanto $p(x)=(x+1)^2(2x-1)(3x+1)$ *y sus raíces son* $x=-1$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=-\dfrac{1}{3}$

Factoricemos $q(x)=x^5+2x^4+2x^3-3x-2$

$$q(x)=(x-1)(x+1)^2(x^2+x+2)$$

x^2+x+2 *es primo puesto que no tiene raíces*

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 2 & 2 & 0 & -3 & -2 \\
1 & & 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\
\hline
 & 1 & 3 & 5 & 5 & 2 & 0 \\
-1 & & -1 & -2 & -3 & -2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & \\
-1 & & -1 & -1 & -2 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 0 & &
\end{array}$$

$$MCD[p(x),q(x)]=(x+1)^2$$

Ejercicio 5.

Dado el polinomio $p(x)=x^4+4x^3+ax^2+bx+c$, encuentra los valores de *a*, *b* y *c*, sabiendo que es divisible entre $x+2$, que obtenemos el mismo resto al dividirlo entre $x-1$ y $x+3$ y, además, $x=0$ es una de sus raíces.

<u>*Solución:*</u>

$$p(x)=x^4+4x^3+ax^2+bx+c$$

$p(x)$ *es divisible entre* $(x+2) \Rightarrow p(-2)=0 \Rightarrow (-2)^4+4(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+c=0 \Rightarrow 4a-2b+c=16$

Igual resto al dividir $p(x)$ *entre* $(x-1)$ *y* $(x+3) \Rightarrow p(1)=p(-3) \Rightarrow 5+a+b+c=-27+9a-3b+c \Rightarrow 8a-4b=32$

$x=0$ *es raíz de* $p(x) \Rightarrow p(0)=0 \Rightarrow c=0$

$$\begin{cases} 4a-2b+c=16 \\ 8a-4b=32 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b=16 \\ 8a-4b=32 \end{cases} \Rightarrow \text{las dos ecuaciones son iguales} \Rightarrow 2a-b=8 \Rightarrow b=2a-8 \ \ y \ \ c=0$$

Quiere decir que hay infinitos polinomios que cumplen esas condiciones, uno para cada valor de a.

Por ejemplo, si $a=2 \Rightarrow b=-4$ *y el polinomio será* $p(x)=x^4+4x^3+2x^2-4x$

Ejercicio 6.

Simplifica, si es posible, la fracción $\dfrac{x^4+2x^3+2x^2-2x-3}{x^4+2x^3+4x^2+2x+3}$

Solución:

Descomponemos el polinomio $x^4+2x^3+2x^2-2x-3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 & 5 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & -3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

x^2+2x+3 *es un polinomio primo*

$$x^4+2x^3+2x^2-2x-3=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$$

Ahora, para poder simplificar la fracción, $x^4+2x^3+4x^2+2x+3$ *debe ser divisible por* $(x-1)$, $(x+1)$ *o* (x^2+2x+3).

Probamos por $(x-1)$ *y* $(x+1)$ *y no es divisible, nos queda probar por* (x^2+2x+3)

$$\begin{array}{rl} x^4+2x^3+4x^2+2x+3 & \underline{|\,x^2+2x+3} \\ \underline{-x^4-2x^3-3x^2\qquad\qquad} & x^2+1 \\ x^2+2x+3 & \\ \underline{-x^2-2x-3} & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^4+2x^3+4x^2+2x+3=(x^2+2x+3)(x^2+1)$$

$$\frac{x^4+2x^3+2x^2-2x-3}{x^4+2x^3+4x^2+2x+3}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)}{(x^2+2x+3)(x^2+1)}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$