Examen de 2º Bachiller CCSS. Matrices y Determinantes

Nombre del alumno: **Grupo:**

Cada problema tiene el valor que se indica, se valorará no sólo el resultado sino también el ***desarrollo del problema*** y el ***uso correcto de la notación matemática***

Ejercicio 1 (PAU CYL 2010 Junio): Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y

$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ Halla una matriz X que cumpla que 2·X-B·A=A·B. **(2.5 puntos)**

Resolución: Despejamos X→ 2·X=A·B+B·A, X=$\frac{1}{2}(A\cdot B+B\cdot A)$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 7 & -7 \\ 1 & -7 & -4 \\ 20 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 16 & -6 & -5 \\ -17 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

X=$\frac{1}{2}(A\cdot B+B\cdot A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 17 & -13 & -9 \\ 3 & -15 & 12 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2(PAU Madrid Junio 2009): Se considera la matriz dependiente del parámetro real k:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & k\\ k & 1 & k\end{pmatrix}$$ **(2,5 puntos)**

a) Determinar los valores de k para los que la matriz es inversible **(1 punto)**
b) Para k=2, calcúlese (si existe) A^{-1} **(0,75 puntos)**
c) Para k=1 calcular $(A-2A^T)^2$ **(0,75 puntos)**

Resolución:

a) Inversible si $|A| \neq 0$ → $-k+k^2-(-k+k)=0$ → $k^2-k=0$ k={0,1}. Luego es inversible (tiene inversa) si **k**$\in R-\{0,1\}$

b) k=2 como -2≠0,1 tiene inversa $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix}$

c) k=1:

$$(A-2\cdot A^t)^2=\left(\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3(PAU Madrid Septiembre 2013): Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ **(2,5 puntos)**

a) Obténgase A^{2011} **(1.25 puntos)**
b) Halar la matriz X que cumple A·X=$\begin{pmatrix}11 & 5 & 1\\ -7 & -3 & 0\end{pmatrix}$ **(1.25 puntos)**

Resolución:

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A$$
$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=I$$

…

$$A^n=\begin{cases}A \;\; si\;\; n\;\; impar\\ I\;\; si\;\; n\;\; par\end{cases}$$ → $$A^{2011}=A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

b) Despejando X tenemos X=$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}11 & 5 & 1\\ -7 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

Calculemos A^{-1}=$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Por tanto X=$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & 5 & 1\\ -7 & -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Ejercicio 4(PAU Madrid Junio 2015): Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$ **(2.5 puntos)**

a) Estudiar e rango de A en función del parámetro real k **(1.75 puntos)**
b) Calcular, si existe, la matriz inversa de A para k=3 **(0.75 puntos)**

a) Para estudiar el rango veamos el determinante de A: |A|=12-4-(4k)=8-4k

Si k≠2 → |A|≠0 y rang(A)=3

Si k=2 → |A|=0 y $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6\neq 0$ y por tanto rang(A)=2

b) Si k=3 $A^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ -3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$