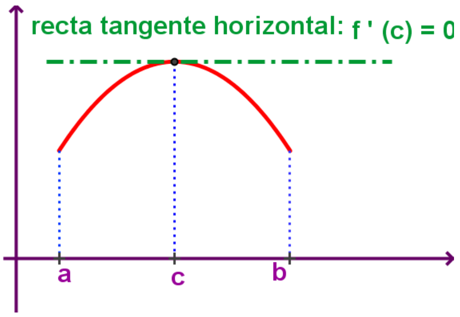
FUNCIONES DERIVABLES EN UN INTERVALO

Teorema de Rolle

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir $f(a) = f(b)$

Entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir, con tangente horizontal.



Teorema de Rolle

Hipótesis : f es continua en $[a, b]$
f es derivable en (a, b)
$f(a) = f(b)$

Tesis: $\exists c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$

Ejemplo 3

La función $f: [-2, 1] \to \Re$ definida por $f(x) = x^3 - 3x$ verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en$[-2, 1]$ por ser polinómica
2. Es derivable en $(-2, 1)$ por se polinómica.
3. $f(-2) = f(1) = -2$

Entonces existe un punto c en el intervalo abierto $(-2, 1)$ con derivada nula en dicho punto. Vamos a comprobarlo:

$$f(x) = x^3 - 3x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3\,x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = -1} \in (\boldsymbol{-2, 1})$$

Ejemplo 4

Determina k para que la función $f(x) = x^3 - kx + 10$ cumpla las hipótesis del Tª de Rolle en el intervalo $[-3, 1]$ y calcula el punto que vaticina el Tª.

➦ La continuidad y derivabilidad se cumplen puesto que es una función polinómica, luego la única condición que hay que imponer es la 3ª:

$$f(-3) = f(1) \quad \Rightarrow \quad (-3)^3 - k(-3) + 10 = 1^3 - k \cdot 1 + 10 \quad \Rightarrow \quad -27 + 3k + 10 = 11 - k$$
$$4k = 28 \quad \Rightarrow \quad k = 7 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3 - 7x + 10$$

➦ El valor que vaticina el Tª es:

$$f(x) = x^3 - 7x + 10 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3x^2 - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1'53 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c = -1'53} \in (\boldsymbol{-2, 1})$$

Ejemplo 5: **Aplicación del teoremas de Rolle**

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x)=0$ tiene 1 única solución $\Rightarrow$ $f(x)=0$ tiene 2 soluciones como máximo

Solución

La demostración se hace por reducción al absurdo es decir negar "tiene 2 soluciones como máximo"

Se supone que $f(x)=0$ tiene 3 soluciones: $\exists\, c_1 < c_2 < c_3$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=f(c_3)=0$

Por tanto se puede aplicar el Tª de Rolle a la función f en los intervalos $[c_1,c_2]$ y $[c_2,c_3]$

En ambos intervalos se cumplen las hipótesis del Tª Rolle, luego:

$\exists\, d \in (c_1,c_2)$ *y* $\exists\, d' \in (c_2,c_3)$ *tales que* $f'(d)=f'(d')=0$ en contradicción con "$f'(x)=0$ tiene 1 única solución" por tanto no se puede suponer que $f(x)=0$ tiene 3 soluciones

Por tanto $f(x)=0$ tiene 2 soluciones como máximo

Se demuestra en general que:

Sea f una función derivable, demostramos que si $f'(x)=0$ tiene n única soluciones $\Rightarrow$ $f(x)=0$ tiene $n+1$ soluciones como máximo

Ejemplo 6: **Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y de Rolle**

Demuestra que la ecuación $x^5+5x+1=0$ sólo admite una solución real

Solución

1°. Se considera la función $f(x)=x^5+5x+1$ continua y derivable en $\Re$ luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tª Bolzano:

$f(0)=1>0$ $\qquad$ $f(1)=7>0$

$f(-1)=5>0$ $\qquad$ $f(-2)=-41<0$

3°. Por tanto en el intervalo $[-2,-1]$ se cumplen las hipótesis del Tª de Bolzano, luego:

$\exists\, c\in(-2,-1)$ tal que $f(c)=0$ que equivale a decir que la ecuación $x^5+5x+1=0$ tiene una solución c en el intervalo $(-2,-1)$

4°. Es única:

Se supone que tiene 2 soluciones: $\exists\, c_1 < c_2$ *tales que* $f(c_1)=f(c_2)=0$

En el intervalo $[c_1,c_2]$ se cumple las hipótesis del Tª Rolle, luego:

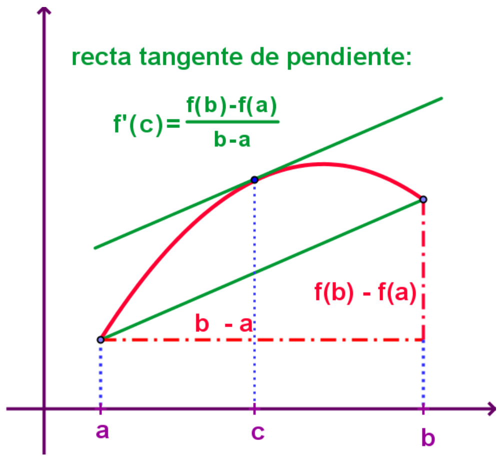
$\exists\, d \in (c_1,c_2)$ *tal que* $f'(d)=0$ pero $f'(x)=5x^4+5\neq 0\ \forall\, x\in\Re$ por tanto no se puede suponer que $f(x)=0$ tiene 2 soluciones

Teorema del valor medio o de Lagrange

Sea f una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto (a,b)

Entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Teorema del Valor Medio

Hipótesis: f es continua en $[a, b]$
f es derivable en (a, b)

Tesis: $\exists c\in(a,b)\ /\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

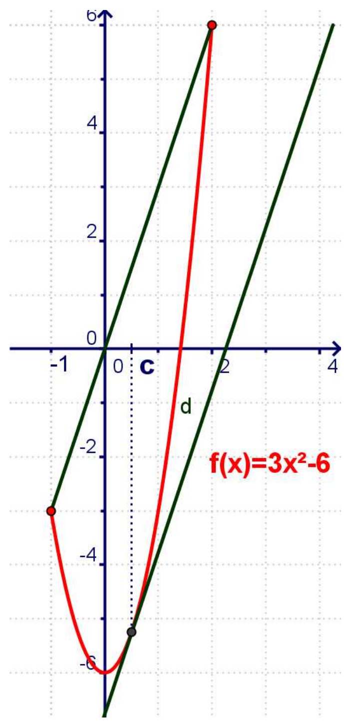
Interpretación geométrica: Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda que une los extremos.

Ejemplo 7

Sea $f:[-1,2]\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x)=3x^2-6$ que es continua y derivable en su dominio. Por el teorema del valor medio:

$\exists\ c\in(-1,2)\ /\ f'(c)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{6-(-3)}{3}=3$

$f(x)=3x^2-6\ \Rightarrow\ f'(x)=6x\ \Rightarrow\ 6x=3\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{c}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$



Teorema de Cauchy

Si f y g son dos funciones continuas en $[a.b]$ y derivables en (a,b), existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Ejemplo 8

Halla el valor de c del intervalo $(0,3)$ donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo $f(x)=-2x+4$ y $g(x)=x^2-4$

- Las funciones son continuas y derivables en todo $\Re$ por ser funciones polinómicas
- $\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2\ \Rightarrow\ f'(c)=-2 \\ g'(x)=2x\ \Rightarrow\ g'(c)=2c \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{-2}{2c}=\frac{-1}{c}$
- Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=4\ \ y\ \ f(3)=-2 \\ g(0)=-4\ \ y\ \ g(3)=5 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{f(3)-f(0)}{g(3)-g(0)}=\frac{-2-4}{5+4}=\frac{-2}{3}$$

- Luego $\frac{-2}{3}=\frac{-1}{c}\ \Rightarrow\ -2c=-3\ \Rightarrow\ c=\frac{3}{2}\in(0,3)$

Regla de L´Hôpital

Esta regla permite obtener fácilmente ciertos límites y dice:

$$Si \ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \ y \ \exists \ \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \ \Rightarrow \ \exists \ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También se puede aplicar para cuando $x \to \infty$ *y la indeterminación* $\frac{\infty}{\infty}$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.

Ejemplo 9

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0} \ indeterminación \ L'Hôp = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)-senx}{x.senx}=\frac{\mathrm{Ln}(1+0)-sen0}{0.sen0}=\frac{0}{0} \ (aplicamos\ la\ regla\ de\ L'Hôpital)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+x)-senx}{x.senx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{senx+x.\cos x}=\frac{\frac{1}{1+0}-\cos 0}{sen0+0.\cos 0}=\frac{0}{0} \ (aplicamos\ L'Hôpital)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+senx}{\cos x+\cos x-x.senx}=\frac{\frac{-1}{(1+0)^2}+sen0}{\cos 0+\cos 0-0.sen0}=\frac{-1}{2}$$

Ejemplo 11

Se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Determina el valor de a y calcula el límite.

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)\underline{\underline{\infty-\infty}}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-a(e^x-1)}{(e^x-1).2x}\right)=\frac{0}{0}\ ind\ (L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-ae^x}{e^x.2x+(e^x-1).2}\right)=\frac{2-a}{0}$$

Como me dicen que el límite existe y es finito el numerador ha de ser cero para poder seguir aplicándole la Regla de L'Hôpital, es decir $2-a=0 \Rightarrow a=2$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, con $a=2$, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-2.e^x}{e^x.2x+(e^x-1).2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2.e^x}{e^x.2x+2.e^x+2.e^x}\right)=\frac{-2}{0+2+2}=\frac{-1}{2}$$

Ejemplo 12

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{e^{2x}-1}=\frac{0}{0}\ L'Hôpital=\lim_{x\to 0}\frac{-2cosx\cdot(-senx)}{2\cdot e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx\cdot senx}{e^{2x}}=\frac{0}{1}=0$$