Matemáticas aplicadas a las CCSS II - 2º de Bachillerato
Examen Final de la Segunda Evaluación - 16 de marzo de 2010

1. Calcular los siguientes límites. Indicar el tipo de indeterminación y el razonamiento que lleva a la obtención del resultado. Si se obtiene ∞ debes indicar su signo tanto por la izquierda como por la derecha caso de que x tienda a un punto.

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + 2x - 6x^4 + 1}{4x^2 - 6x^3 + x - 2}$ (**1 punto**)

   b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3 - 2}{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}$ (**1 punto**)

   c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}$ (**1 punto**)

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$, se pide:

   a) Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Caso de que no sea continua decir el tipo de discontinuidad que se presenta.
   (**2 puntos**)

   b) Realizar la representación gráfica de la función. (**1 punto**)

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$, hallar o estudiar lo que se pide en los siguientes apartados, contestando con detalle a cada uno de ellos:

   a) Dominio. (**0,3 puntos**)

   b) Puntos de corte con los ejes. (**0,7 puntos**)

   c) Continuidad. (**1 punto**)

   d) Asíntotas. (**1 punto**)

   e) Representación gráfica. (**1 punto**)

Soluciones

- **Ejercicio 1:**

  a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3-x^2+2x-6x^4+1}{4x^2-6x^3+x-2} = \left[\text{Indet } \dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6x^4}{-6x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

  Obsérvese que cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador el límite es ∞, y su signo depende de los términos de mayor grado tanto del numerador como del denominador.

  b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-2}{x^3-2x^2-2x+1} = \dfrac{-3}{0} = \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x \to -1^- \\ -\infty & \text{si} \quad x \to -1^+ \end{cases}$

  c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{2x^3-9x^2+12x-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(2x-1)(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{3}{3} = 1$

- **Ejercicio 2:**

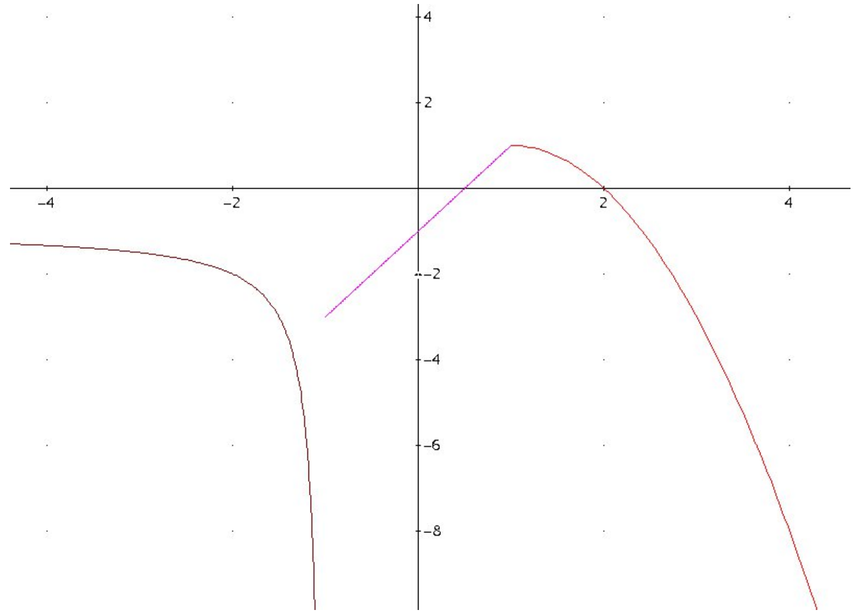
  Escribamos la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

  a) Estudiemos la continuidad en los puntos $x = -1$ y $x = 1$

  ✓ $x = -1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{-x}{x+1} = \dfrac{1}{0} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-1^+} (2x-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to-1} f(x) \Rightarrow f$ no es continua en el punto $x = -1$. Hay una discontinuidad de salto infinito en este punto.

  ✓ $x = 1$: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} (2x-1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} (-x^2+2x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1$. Además $f(1) = 1$. Por tanto $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 1 = f(1) \Rightarrow f$ es continua en $x = 1$.

  b) Representación gráfica:



- **Ejercicio** 3**:**

Escribamos la función: $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$

a) Esta función es racional. Por tanto su dominio son todos los números reales salvo aquellos que anulen el denominador.
La ecuación $x^2 - x - 2 = 0$ tiene dos soluciones: $x = -1$ y $x = 2$. Así pues $Dom f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

b) ✓ Punto de corte con el eje Y. Haciendo $x = 0$ se tiene $y = \dfrac{3}{2}$. Por tanto el punto de corte con el eje Y es $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

✓ Punto de corte con el eje X. Haciendo $y = 0 \Rightarrow \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow$
$2x^2 + x - 3 = 0$, ecuación que tiene por soluciones $x = -\dfrac{3}{2}$ y $x = 1$. Por tanto los puntos de corte con el eje X son $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $(1, 0)$

c) La función es continua en todo su dominio. Veamos qué tipo de discontinuidad se da en los puntos $x = -1$ y $x = 2$:

✓ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = \dfrac{-2}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to -1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x \to -1^+ \end{cases}$. Por tanto, en el punto $x = -1$ hay una discontinuidad de salto infinito. Además, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

✓ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = \dfrac{3}{0} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to 2^- \\ +\infty & \text{si} \quad x \to 2^+ \end{cases}$. Por tanto, en $x = 2$ hay una discontinuidad de salto infinito. Además, la recta $x = 2$ es otra asíntota vertical.

d) Las asíntotas verticales ya se han hallado en el apartado anterior. Veamos las horizontales: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = 2$. Entonces $y = 2$ es una asíntota horizontal.

e) Representación gráfica: