Halla la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6}$$

Solución:

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$1=A(x+3)+B(x-2)$

si x = 2: 1 = 5A $\Rightarrow$ A = 1/5

si x = –3: 1 = –5B $\Rightarrow$ B = –1/5

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-6} = \int\left(\frac{1/5}{x-2}-\frac{1/5}{x+3}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}\,dx-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{1}{5}\ln(x+3)+c$$

Calcula $\int \frac{2}{x^2-1}dx$

Solución:

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Luego:

$2=A(x+1)+B(x-1)$

si x = 1: 2 = 2A $\Rightarrow$ A = 1

si x = –1: 2 = –2B $\Rightarrow$ B = –1

Con esto:

$$\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=\ln(x-1)-\ln(x+1)+c$$

Calcula: $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$

Solución:

(Observa que es casi igual que la anterior.)

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\int\frac{1/2}{1-x}dx+\int\frac{1/2}{1+x}dx=-\frac{1}{2}L(1-x)+\frac{1}{2}L(1+x)+c$$

Calcula:

$$\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2-4}dx$$

Solución:
Hacemos la división $(x^3+x^2+1):(x^2-4)$.

Queda: $\frac{x^3+x^2+1}{x^2-4}=x+1+\frac{4x+5}{x^2-4}$.

Descomponemos en fracciones simples $\frac{4x+5}{x^2-4}$.

$$\frac{4x+5}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow 4x+5=A(x+2)+B(x-2)$$

Para x = 2, se tiene: $13=4A \Rightarrow A=13/4$

Para x = –2, se tiene: $-3=-4B \Rightarrow B=3/4$

Luego, $\frac{4x+5}{x^2-4}=\frac{13/4}{x-2}+\frac{3/4}{x+2}$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2-4}dx = \int\left(x+1+\frac{13/4}{x-2}+\frac{3/4}{x+2}\right)dx =$$

$$= \int (x+1)dx+\frac{13}{4}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{2}x^2+x+\frac{13}{4}\ln(x-2)+\frac{3}{4}\ln(x+2)+k$$

Calcula:

$$\int \frac{2dx}{x^3-x}$$

Solución:
Puede hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador de la expresión $\frac{2}{x^3-x}$ son 0, –1 y 1, se tendrá:

$$\frac{2}{x^3-x}=\frac{2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x^3-x}$$

Por tanto: $2=A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$

Si damos los valores 0, 1 y –1 se tendrá:

Para x = 0 $\Rightarrow$ 2 = –A $\Rightarrow$ A = –2
Para x = 1 $\Rightarrow$ 2 = 2B $\Rightarrow$ B = 1
Para x = –1 $\Rightarrow$ 2 = 2C $\Rightarrow$ C = 1

Luego

$$\int\frac{2}{x^3-x}dx=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-2\ln x+\ln(x-1)+\ln(x+1)+c$$

Calcula la siguiente integral: $\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

Solución:
Por descomposición en fracciones simples se tiene:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3}$$

Por tanto,

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)$$

Identificando coeficientes se tiene el sistema,

$$\left\{\begin{array}{c} A = 0 \\ 2A + B = 1 \\ A + B + C = 0 \end{array}\right. \Rightarrow A = 0,\ B = 1,\ C = -1$$

Luego $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$, de donde

$$\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}\right)dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c$$

Las dos últimas integrales son inmediatas, pues $\int f'(x)\left(f(x)\right)^n dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}$. Ahora basta con escribir $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \int (x+1)^{-2}\,dx - \int (x+1)^{-3}\,dx$