

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx \quad \text{Sol: } \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + k$$

Tenemos una integral de tipo racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Vamos a descomponer el integrando en fracciones simples:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (raíces reales simples)}$$

Entonces:

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Vamos a calcular los coeficientes indeterminados. Al ser los denominadores iguales, los numeradores también lo serán. Por tanto:

$$2x-1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1 \\ x=2 \rightarrow 3 = B \Rightarrow B = 3 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx &= \int \left( \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = -\int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx = \\ &= -\ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + k = \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + k \end{aligned}$$

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} \quad \text{Sol: } \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^6}{(x+1)(-5)^5} \right| + k$$

Tenemos una integral de tipo racional donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Vamos a descomponer el integrando en fracciones simples:

$$(x+1)(x+3)(x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = -5 \end{cases} \text{ (raíces reales simples)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+5} = \\ &= \frac{A(x+3)(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)} \end{aligned}$$

Para calcular los coeficientes indeterminados, al ser los denominadores iguales, los numeradores también lo serán. Por tanto:

$$x = A(x+3)(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+1)(x+3) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow -1 = 8A \Rightarrow A = -\frac{1}{8} \\ x = -3 \rightarrow -3 = -4B \Rightarrow B = \frac{3}{4} \\ x = -5 \rightarrow -5 = 8C \Rightarrow C = -\frac{5}{8} \end{cases}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x+1)(x+3)(x+5)} &= \int \left( -\frac{\frac{1}{8}}{x+1} + \frac{\frac{3}{4}}{x+3} + \frac{-\frac{5}{8}}{x+5} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{8} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{5}{8} \int \frac{1}{x+5} dx = -\frac{1}{8} \ln(x+1) + \frac{3}{4} \ln(x+3) - \frac{5}{8} \ln(x+5) + k = \\ &= \frac{1}{8} (\ln(x+1) + 6 \ln(x+3) - 5 \ln(x+5)) + k = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+3)^6}{(x+1)(x+5)^5} \right| + k \end{aligned}$$


---

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx \quad \text{Sol: } \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| +$$

Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, antes de aplicar el método de descomposición en fracciones simples tendremos que dividir. De esta forma obtenemos:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \cdot dx &= \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \cdot dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4} \cdot dx \end{aligned}$$

A la integral que nos queda le aplicamos el método de descomposición en fracciones simples. Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también lo serán; por tanto:

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$

Calculamos los coeficientes indeterminados: le vamos asignando los valores de las raíces

$$\begin{aligned} x = 0 &\rightarrow -8 = -4A \rightarrow A = 2 \\ x = 2 &\rightarrow 40 = 8B \rightarrow B = 5 \\ x = -2 &\rightarrow -24 = 8C \rightarrow C = -3 \end{aligned}$$

Por tanto, la fracción descompuesta en fracciones simples nos queda:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$$

La integral de la función pedida será:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \cdot dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \cdot dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \left( \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) \cdot dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x} \cdot dx + \int \frac{5}{x-2} \cdot dx - \int \frac{3}{x+2} \cdot dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{1}{x} \cdot dx + 5 \int \frac{1}{x-2} \cdot dx - 3 \int \frac{1}{x+2} \cdot dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \cdot \ln|x| + 5 \cdot \ln|x-2| - 3 \cdot \ln|x+2| + k = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^2 - 1)(x + 2)} \quad \text{Sol: } \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{(-1)}{(x+1)^3} \right| + \frac{16}{3} \cdot \ln |x+2| + k$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, tenemos que dividir, obteniendo:

$$\frac{x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} = x - 2 + \frac{5}{(x - 1)(x + 2)}$$

Con lo que

$$\int \frac{x^4 \cdot dx}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \int (x - 2) dx + \int \frac{5x^2 - 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{5x^2 - 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$$

y tendremos que integrar la función racional que nos queda, donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{5x^2 - 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, también lo serán los numeradores. Entonces:

$$5x^2 - 4 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

Calculamos los coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned} x = 1 &\rightarrow 1 = 6A \rightarrow A = \frac{1}{6} \\ x = -1 &\rightarrow 1 = -2B \rightarrow B = -\frac{1}{2} \\ x = -2 &\rightarrow 16 = 3C \rightarrow C = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } \frac{5x^2 - 4}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{16}{3}}{x+2}$$

Y, por tanto:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx &= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{5x^2 -}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \left[ \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{16}{16}}{x+2} \right] dx = \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \int \frac{\frac{1}{6}}{x-1} \cdot dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \cdot dx + \int \frac{\frac{16}{16}}{x+2} \cdot dx = \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \cdot dx + \frac{16}{3} \int \frac{1}{x+2} \cdot dx = \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| + \frac{16}{3} \cdot \ln|x+2| + k = \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot (\ln|x-1| - 3 \cdot \ln|x+1|) + \frac{16}{3} \cdot \ln|x+2| + k = \\
&= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \cdot \ln \left| \frac{-1}{(x+1)^3} \right| + \frac{16}{3} \cdot \ln|x+2| + k
\end{aligned}$$


---

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$$

Sol:  $\frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-}{k} \right|$

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador aplicamos la descomposición en fracciones simples directamente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \rightarrow \\
&\rightarrow 1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2
\end{aligned}$$

Calculamos los coeficientes:

$$x=1 : 1 = -B \rightarrow B = -1$$

$$x=2 : 1$$

$$x=0 : 1 = 2A - 2B + C \rightarrow 1 = 2A + 2 + 1 \rightarrow A = -1$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)} \cdot dx = \int \frac{-1}{x-1} \cdot dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} \cdot dx + \int \frac{1}{(x-2)} \cdot dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - \int (x-1)^{-2} \cdot dx + \int \dots \cdot dx = \\
&= -\ln|x-1| - \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \ln|x-2| + k = \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{-1} \right| + k
\end{aligned}$$


---

$$\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx \quad \text{Sol: } \frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^2}{x^2} + k$$

Igual que en el anterior, aplicamos la descomposición en fracciones simples:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \rightarrow x \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0 \rightarrow x \cdot (x-2)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx}{x(x-2)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow x-8 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \Rightarrow
\end{aligned}$$

Calculamos los coeficientes:

$$\begin{aligned}
x=0 &\rightarrow -8 = 4A \rightarrow A = -2 \\
x=2 &\rightarrow -6 = 2C \rightarrow C = -3 \\
x=1 &\rightarrow -7 = A - B + C \rightarrow B = 7 + A + C = 7 - 2 - 3 = 2 \rightarrow B = 2
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx &= \left( \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2} \right) \cdot dx = \\
&= -2 \int \frac{1}{x} \cdot dx + 2 \int \frac{1}{x-2} \cdot dx - 3 \int \frac{1}{(x-2)^2} \cdot dx = -2 \ln|x| + 2 \ln|x-2| - 3 \int (x-2)^{-2} dx = \\
&= -2 \ln|x| + 2 \ln|x-2| - 3 \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + k = \frac{3}{x} + \ln \frac{(-2)}{2} + k
\end{aligned}$$