2 MATRICES

El estudio de las matrices será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ellas y comprobarán su aplicación en la resolución de problemas y en particular en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Al inicio de esta unidad se definen las matrices y se presentan los distintos tipos de matrices que podemos encontrar, a continuación, se opera con ellas y se estudian sus propiedades.

En la segunda parte de la unidad, se muestra la notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Para llegar a definir matrices inversas y su cálculo. Por último, se analizan diferentes aplicaciones de las matrices a la resolución de sistemas, y se estudia el rango de una matriz aplicando el método de Gauss.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las matrices, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con herramientas tecnológicas a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística.** En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, aplicando el método de Gauss o la notación matricial, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Identificar matrices y los diferentes tipos que podemos encontrar de ellas.
- Operar con matrices y manejar sus propiedades.
- Expresar sistemas de ecuaciones utilizando la notación matricial.
- Calcular la matriz inversa de una dada aplicando el método de Gauss.
- Resolver sistemas de ecuaciones utilizando matrices.
- Determinar el rango de una matriz aplicando el método de Gauss.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD			
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**	**Competencias clave**
Matrices Definición Tipos de matrices	1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos.	1.1. Identifica matrices y reconoce los diferentes tipos que se puede encontrar.	CMCT CL CAA CSC
Operaciones con matrices Adición de matrices Multiplicación de una matriz por un número real Multiplicación de matrices		1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos.	
Notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales		1.3. Utiliza el lenguaje matricial para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos.	
Matriz inversa Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss	2. Analizar, representar y resolver problemas planteados en contextos reales, utilizando matrices e interpretando críticamente los resultados.	2.1. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.	CMCT CD CL CAA
Solución matricial de un sistema de ecuaciones lineales		2.2. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para resolver sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos.	
Aplicación de las matrices a la resolución de problemas Aplicación del producto de matrices Matrices y grafos			
Rango de una matriz Cálculo del rango por el método de Gauss		2.3. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss.	

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

Actividades de refuerzo
Actividades de ampliación

Prueba de evaluación

Contenidos

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Matrices
- Definición
- Tipos de matrices

2. Operaciones con matrices
- Adición de matrices
- Multiplicación de una matriz por un número real
- Multiplicación de matrices

3. Notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

4. Matriz inversa
- Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

5. Solución matricial de un sistema de ecuaciones lineales

6. Aplicación de las matrices a la resolución de problemas
- Aplicación del producto de matrices
- Matrices y grafos

7. Rango de una matriz
- Cálculo del rango por el método de Gauss

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

PARA EL ALUMNO

Vídeo. Método matricial

Vídeo. Potencia *n*-ésima de una matriz
Vídeo. Ecuación matricial

Actividades interactivas.
Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 27)

1. Indica, en los siguientes sistemas, el número de ecuaciones linealmente independientes:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - z = -1 \\ 6x + 8y - 2z = -2 \\ 7x + 9y - 3z = -5 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 2x + 10y - 4z = -2 \\ -x + 5y - 2z = -1 \\ x + 15y - 6z = -3 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 7 \\ x - y + 2z = 5 \\ 5x - 13y + 6z = 13 \end{cases}$

a) Hay dos ecuaciones linealmente independientes.

b) Hay dos ecuaciones linealmente independientes.

c) Hay dos ecuaciones linealmente independientes.

2. Resuelve los sistemas propuestos por el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 2 \\ -x + 3y - 2z = -9 \\ 2x + y - 3z = -10 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} 5x + y - z = 2 \\ 2x - y - z = 4 \\ 7x - 2z = 6 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$

a) Triangulamos el sistema por el método de Gauss, y obtenemos:

$x = \frac{8}{5}, y = \frac{3}{5}, z = \frac{23}{5}$

b) Triangulamos el sistema por el método de Gauss, y se observa que es un sistema compatible indeterminado con un parámetro.

Las infinitas soluciones son: $x = \alpha, y = \frac{-2 - 3\alpha}{2}, z = \frac{7\alpha - 6}{2}$

c) Triangulamos el sistema por el método de Gauss, y obtenemos:

$x = -13, y = \frac{23}{2}, z = -\frac{5}{2}$

3. En un centro de enseñanza hay 30 alumnos de inglés repartidos entre la modalidad de Bachillerato de Ciencia y Tecnología y la de Humanidades y Ciencias Sociales. De los 20 alumnos que cursan la primera modalidad, el 40 % son mujeres; la segunda modalidad tiene un 50 % de alumnas. Construye una tabla de doble entrada que explique la distribución de los alumnos en la clase de inglés.

	N.° de alumnas	N.° de alumnos	
Inglés Modalidad CT	8	12	20
Inglés Modalidad CCSS	5	5	10
Clases de inglés	13	17	30

4. Una empresa de instalaciones dispone de cobre, aluminio y titanio. Para fabricar 100 m de cable tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 1 de aluminio y 2 de titanio, mientras que para fabricar 100 m de cable de tipo B son necesarios 15 kg de cobre, 1 de aluminio y 1 de titanio. Construye una tabla de doble entrada con los datos del problema.

	Kilos de cobre	Kilos de aluminio	Kilos de titanio	
Cable de tipo A	10	1	1	12
Cable de tipo B	15	1	1	17
Total cable	25	2	2	29

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Método matricial (página 41)

En el vídeo se muestra la resolución del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas de la explicación. Se transforma el sistema en una ecuación matricial y se utiliza el método de Gauss para hallar la matriz inversa de la matriz de coeficientes. Para finalizar, se determina la solución del sistema multiplicando dos matrices. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo completo de este tipo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Potencia *n*-ésima de una matriz (página 49)

En el vídeo se muestra cómo determinar la potencia n-ésima de una matriz cuadrada hallando sus primeras potencias y deduciendo la expresión general para una potencia cualquiera. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo de este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasarlo.

Ecuación matricial (página 51)

En el vídeo se muestra la resolución de una ecuación con matrices cuadradas de orden 2, despejando la incógnita y calculando la matriz inversa, por el método de Gauss, de una de las matrices conocidas. Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital un ejemplo de este tipo de ejercicios o para que los alumnos puedan repasarlo más tarde.

Actividades (páginas 30/48)

1 **Calcula los valores de a, b y c, para que la matriz A sea antisimétrica. Calcula después su opuesta y su traspuesta.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & a & -4 \\ -4 & 1 & 0 & b \\ 3 & c & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -a & 4 \\ 4 & -1 & 0 & -b \\ -3 & -c & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & c \\ 4 & a & 0 & 2 \\ -3 & -4 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Para que A sea antisimétrica a, b y c tienen que valer:

$a = -1$, $b = -2$, $c = 4$

2 **Calcula las matrices A y B sabiendo que:**

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos los sistemas matriciales y obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3 **Calcula las matrices A y B sabiendo que:**

$$2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Resolvemos los sistemas matriciales y obtenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

4 **Calcula A^2, A^3 y A^4 y obtén una fórmula general para A^n a partir de la siguiente matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2a^2 & 2a^2 \\ 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 8a^4 & 8a^4 \\ 8a^4 & 8a^4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4a^3 & 4a^3 \\ 4a^3 & 4a^3 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \\ 2^{n-1}a^n & 2^{n-1}a^n \end{pmatrix}$$

5 **Dada la matriz fila $(3\ \ 2\ \ -1)$, calcula una matriz columna tal que el producto de ambas sea la matriz (2) de dimensiones 1×1.**

Existen infinitas matrices columna de orden 3×1 que cumplen que $3a_{11} + 2a_{21} - a_{31} = 2$. Por ejemplo:

$$(3 \quad 2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2)$$

6 **Si $A \cdot X = B$, calcula la dimensión de X en los siguientes casos.**

a) **A es de dimensión 4×3 y B es de dimensión 4×3.**

b) **A es de dimensión 2×5 y B es de dimensión 2×3.**

c) **A es de dimensión 3×2 y B es de dimensión 4×3.**

a) La dimensión de X es 3×3.

b) La dimensión de X es 5×3.

c) No tiene solución.

7 **Verifica la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices con A, B y C:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 31 \\ 23 & 46 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 19 & 31 \\ 23 & 46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 138 \\ -46 & 184 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 46 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 46 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 138 \\ -46 & 184 \end{pmatrix}$$

8 **Verifica la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices con respecto a la adición, utilizando las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 21 & -29 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 17 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 21 & -29 \end{pmatrix}$$

9 **Dadas las matrices de la actividad anterior, calcula.**

a) **$A \cdot B$**

b) **$B \cdot A$**

c) **$A \cdot (B \cdot C)$**

a) $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 26 & -42 \\ -20 & 12 \end{pmatrix}$

10 Resuelve los siguientes sistemas utilizando la notación matricial.

a) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-z=7 \\ x+2y+5z=4 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y-z+t=-13 \\ 3x+y+z-t=8 \\ 2y+3t=-11 \end{cases}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right) \Rightarrow z=1, y=-2, x=3$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -13 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -11 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & -59 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 50 \end{array}\right)$

$\Rightarrow t=-5, z=4, y=2, x=-1$

11 Calcula las matrices inversas de estas matrices (comprueba en todos los casos que el producto de la matriz por su inversa da la matriz identidad).

a) $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** $N=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$

$M^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow N^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12 Resuelve los siguientes sistemas, utilizando el método de la matriz inversa:

a) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ ***c)*** $\begin{cases} 4x+y-z=7 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+y+z=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=7 \\ x-y+3z=9 \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} 3x+2y-z=4 \\ 2x+y+3z=2 \\ x+y-4z=2 \end{cases}$

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema: $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema:

$X=\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=0, y=3, z=4$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 7/2 & -3 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema:

$X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & 7/2 & -3 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=1, y=2, z=-1$

d) La matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ no existe, por lo que el sistema no tiene solución.

13 Tres supermercados, *X, Y* y *Z,* se disputan los clientes de una ciudad. Inicialmente, cada uno tiene una cuota de mercado igual a la tercera parte de los consumidores. Como consecuencia de una campaña publicitaria, un mes después se constata que:

- ***X*** **conserva el 80 % de sus clientes, gana el 10 % de los de *Y* y el 2 % de los de *Z*.**
- ***Y*** **conserva el 70 % de sus clientes, gana el 14 % de los de *X* y el 8 % de los de *Z*.**
- ***Z*** **conserva el 90 % de sus clientes, gana el 6 % de los de *X* y el 20 % de los de *Y*.**

A partir de estos datos:

a) **Escribe matricialmente los cambios producidos en los porcentajes. ¿Qué propiedad tiene la matriz?**

b) **Usa la matriz anterior para calcular la cuota de mercado que tiene cada supermercado después de la campaña.**

a) La matriz que nos muestra los cambios en las ventas es:

$$\begin{pmatrix} 80/100 & 10/100 & 2/100 \\ 14/100 & 70/100 & 8/100 \\ 6/100 & 20/100 & 90/100 \end{pmatrix}$$

Esta matriz verifica que la suma de los elementos de las distintas columnas es la unidad.

b) Las cuotas son:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80/100 & 10/100 & 2/100 \\ 14/100 & 70/100 & 8/100 \\ 6/100 & 20/100 & 90/100 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}306 \\ 0{,}306 \\ 0{,}386 \end{pmatrix}$$

14 **Una empresa de productos congelados tiene dos factorías, *X* e *Y*, y cuatro almacenes, 1, 2, 3 y 4. Cada factoría suministra semanalmente sus productos a los almacenes, tal como indica el grafo de la figura 2.3. El reparto semanal que realizan los cuatro almacenes a tres establecimientos, *A*, *B* y *C*, viene dado por el grafo de la figura 2.4.**

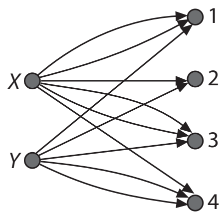

FIGURA 2.3.

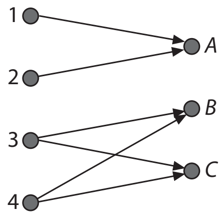

FIGURA 2.4.

a) **Escribe las matrices de adyacencia de ambos grafos.**

b) **Calcula la matriz, *E*, que proporciona el número de entregas semanales que cada factoría realiza a los tres establecimientos.**

c) **¿Cuántas entregas semanales efectúa la factoría *X* al establecimiento *B*?**

a)

$$M_1 = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad M_2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) La factoría *X* realiza 3 entregas cada semana al establecimiento *B*.

15 **Dadas las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) **Calcula sus rangos.**

b) **¿Cuál o cuáles tienen inversa?**

a) El rango de *A* es 1, puesto que hay una columna nula, y las otras dos son una múltiplo de la otra.

Triangulamos *B*: $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -50 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego su rango es 3.

Triangulamos *C:* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego el rango es 2.

Triangulamos *D:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego su rango es 4.

b) Solo tiene inversa la matriz *D*, pues su rango es el máximo.

Ejercicios y problemas (páginas 52/56)

Matrices y operaciones con matrices

1 **Sean las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

a) **¿Cuál es la dimensión de las matrices *A*, *B* y *C*?**

b) **¿Cuál es el valor de a_{13}, b_{12} y c_{32}?**

a) La dimensión de la matriz *A* es 2×3.

La dimensión de la matriz *B* es 3×1.

La dimensión de la matriz *C* es 3×2.

b) $a_{13} = -5$; $\nexists\, b_{12}$; $c_{32} = 9$

2 **Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$, $B = (b_{ij})_{7 \times 3}$, $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ y $D = (d_{ij})_{1 \times 7}$, determina la dimensión de las siguientes matrices producto.**

a) $C \cdot A$ ***b)*** $B \cdot A$ ***c)*** $D \cdot B$ ***d)*** $C \cdot B$

a) 3×4; ***b)*** 7×4; ***c)*** 1×3 y ***d)*** No se puede realizar $C \cdot B$.

3 **Si *A* y *B* son dos matrices no cuadradas, ¿es posible que $A \cdot B = B \cdot A$?**

No es posible, ya que si *A* y *B* no son cuadradas, las matrices producto $A \cdot B$ y $B \cdot A$, si existen, tendrán distinta dimensión.

4 **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + B$	***e)*** $B \cdot A$	***i)*** $(B \cdot A)^t$
b) $A - B$	***f)*** $(A \cdot B)^{-1}$	***j)*** $A^t \cdot B^t$
c) $2A - 2B$	***g)*** $(B \cdot A)^{-1}$	***k)*** $A + I$
d) $A \cdot B$	***h)*** $(A \cdot B)^t$	***l)*** $B - I$

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$

c) $2A - 2B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -14 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -20 & -7 \end{pmatrix}$

e) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

f) $(A \cdot B)^{-1} = \dfrac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$

g) $(B \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

h) $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

i) $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

j) $A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

k) $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

l) $B - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5 **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcula.

a) $A \cdot B$	***e)*** $C \cdot B$
b) $B \cdot A$	***f)*** $B \cdot C$
c) $A \cdot C$	***g)*** $A \cdot D$
d) $C \cdot A$	***h)*** $C \cdot D$

a) $A \cdot B = (-6)$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 12 & 20 \\ 5 & -5 & 15 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

c) $\nexists\ A \cdot C$

d) $\nexists\ C \cdot A$

e) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ 14 \end{pmatrix}$

f) $\nexists\ B \cdot C$

g) $A \cdot D = \begin{pmatrix} 16 & -1 \end{pmatrix}$

h) $C \cdot D = \begin{pmatrix} 41 & 0 \\ 24 & 14 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

6 **Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{4\times 3}$, $B = (b_{ij})_{4\times 4}$, $C = (c_{ij})_{3\times 4}$ y $D = (d_{ij})_{1\times 4}$, determina la dimensión de las siguientes matrices producto.**

a) $C \cdot A$ ***b)*** $B \cdot A$ ***c)*** $D \cdot B$ ***d)*** $C \cdot B$

a) 3×3 *b)* 4×3 *c)* 1×4 *d)* 3×4

7 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$, calcula A^t y $(A^t)^t$.**

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \qquad (A^t)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

8 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcula $3A - A^2 + 2I$.**

$$3A - A^2 + 2I = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

9 **Dadas**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) $A + B$	***c)*** $A \cdot B$	***e)*** A^2
b) $B - A$	***d)*** $B \cdot A$	***f)*** B^3

a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 15 & 8 & 0 \\ 13 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 12 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 14 & 7 & 9 \\ 13 & 5 & 11 \end{pmatrix}$

f) $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \\ 9 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

10 **Una matriz A es idempotente cuando $A \cdot A = A$. Demuestra que la matriz A es idempotente.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz A es idempotente, ya que:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

11 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad. Utiliza la fórmula anterior para calcular A^4.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego son iguales.

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

12 **Se considera $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.**

a) **Calcula el valor de a y b para que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

b) **Para los valores obtenidos en el apartado anterior, halla A^3 y A^4.**

c) **Sea n un número natural cualquiera, halla la expresión de A^n en función de n.**

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De $(a+b)^2 = 1$, $(a-b)^2 = 1$ y $2a = 2$, se obtiene $a = 1$ y $b = 0$.

b) La matriz obtenida en el apartado anterior es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Observando los resultados obtenidos se puede afirmar que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

13 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.**

***a)* Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.**

***b)* Comprueba que $(A+B)^2 = 4I$.**

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B^2$, dado que en este caso $AB = -BA$.

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$

También puede comprobarse efectuando las operaciones matriciales.

14 **Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Halla los valores de p y q que hacen que $A^2 = A$. En este caso razona, sin calcularlo, el valor de A^{10}.**

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$

La igualdad se cumple cuando $p = 0$ y $q = 1$.

Si la matriz verifica $A^2 = A$, entonces $A^{10} = A$.

15 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.**

***a)* Calcula $A^2 + 2AB + B^2$.**

***b)* Halla $(A+B)^2$.**

a) $A^2 + 2\,AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$

$+ 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$

b) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

16 **Sea $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$:**

***a)* Calcula A^2.**

***b)* Halla todos los valores de x e y para los que se verifica que $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & -1+y^2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x^2 - 1 = x + 1 \\ -x - y = -2 \\ x + y = 2 \\ -1 + y^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 0$

17 **Sabiendo que $2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y que $3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$**

***a)* ¿Cuáles son las dimensiones de A y B?**

***b)* Calcula las matrices A y B.**

a) La dimensión de las matrices A y B es 2×3.

b) $\begin{cases} 2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 4A - 2B = \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\Rightarrow 7A = \begin{pmatrix} 21 & 49 & 14 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

$B = 2A - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

18 **Halla A tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.**

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = x + z \\ x = y + t \\ z + t = x \\ z = y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & x-y \end{pmatrix}$. Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} \alpha & -2\alpha \\ -2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix}$

19 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales, determina su valor para que las dos matrices conmuten, es decir, para que se cumpla que $A \cdot B = B \cdot A$.**

Calculamos $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y calculamos $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Puesto que los productos son idénticos, a y b pueden tomar cualquier valor real.

Matriz inversa y ecuaciones matriciales

20 **Calcula las inversas de las siguientes matrices.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

21 **Dadas las siguientes matrices, resuelve la ecuación matricial $X \cdot A = B + P$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Se puede escribir $X = (B + P) \cdot A^{-1}$, siendo:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

22 **Dadas las siguientes matrices, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = C$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Escribimos $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, siendo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

De donde: $X = \begin{pmatrix} 1/7 & -4/7 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

23 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ determina otra matriz, B, tal que $A + B = A \cdot B$.**

La matriz B deberá ser una matriz cuadrada de orden 2:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & 2 + b_{12} \\ -1 + b_{21} & 3 + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} + 2b_{21} & b_{12} + 2b_{22} \\ -b_{11} + 3b_{21} & -b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix}$$

Igualando $A + B = A \cdot B$, se obtiene:

$1 + b_{11} = b_{11} + 2b_{21} \Rightarrow b_{21} = 1/2$

$-1 + b_{21} = -b_{11} + 3b_{21} \Rightarrow b_{11} = 2$

$2 + b_{12} = b_{12} + 2b_{22} \Rightarrow b_{22} = 1$

$3 + b_{22} = -b_{12} + 3b_{22} \Rightarrow b_{12} = -1$

Luego la matriz B es:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

24 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula otra matriz, B, distinta de la matriz nula y de la matriz unidad, tal que $A \cdot B = B \cdot A$.**

Se calculan ambos productos:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ b_{11} + 3b_{21} & b_{12} + 3b_{22} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{12} & b_{11} + 3b_{12} \\ b_{21} + b_{22} & b_{21} + 3b_{22} \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices, obtenemos:

$b_{11} + b_{21} = b_{11} + b_{12} \Rightarrow b_{21} = b_{12}$

$b_{12} + b_{22} = b_{11} + 3b_{12} \Rightarrow b_{22} - b_{11} = 2b_{12}$

$b_{11} + 3b_{21} = b_{21} + b_{22} \Rightarrow b_{22} - b_{11} = 2b_{21}$

$b_{12} + 3b_{22} = b_{21} + 3b_{22} \Rightarrow b_{21} = b_{12}$

La matriz buscada, B, no es única; su forma general es:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$$

Dando valores a x e y encontraremos infinitas matrices que cumplen:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

25 **Dada la matriz A, calcula una matriz triangular superior, B, tal que $A = B \cdot B^t$. ¿Es única la matriz B?**

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$$

Como $A = B \cdot B^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{pmatrix}$

De donde se obtiene que:

$c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$

$bc = -2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } c = 1 \Rightarrow b = -2 \\ \text{Si } c = -1 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$

$a^2 + b^2 = 13 \Rightarrow a^2 + 4 = 13 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Por tanto, existen cuatro matrices que cumplen las condiciones propuestas:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

26 **Dadas las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcula X para que se verifique $A + X - B = I$.

$$X = I + B - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

27 **Determina una matriz X que verifique la igualdad: $A \cdot X = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices no es, en general conmutativo, y por tanto $A \cdot X \neq X \cdot A$:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \neq B$$

28 **Obtén los valores de las variables x, y y z, que verifiquen la siguiente ecuación matricial:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y + z \\ 2y + z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + z \\ -x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 2x + 2 - 4x + x = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$\Rightarrow x = z = 2, y = -3$

29 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:**

a) **Determina la matriz cuadrada M, tal que $M \cdot A = B$.**

b) **Comprueba que $M^2 = I$. Deduce la expresión de M^n.**

a) Podemos calcular M utilizando la matriz inversa de la matriz A, A^{-1}.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ -1/4 & 1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

También se podría resolver planteando un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \\ z + 2t = 2 \\ -3z + 2t = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -1/2, y = 3/4, z = 1, t = 1/2$

b) Se comprueba que $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto:

$$M^n = \begin{cases} M, \text{ si } n \text{ es impar} \\ I, \quad \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

30 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, determina, si existe, una matriz C que cumpla $B \cdot C = A$.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 2 \\ y + 3t = 3 \\ 2y + 6t = 2 \end{cases}$$

El sistema es incompatible, por tanto no existe la matriz C.

31 **Dada la matriz $B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X que verifique la ecuación $X \cdot B + B = B^{-1}$.**

$XB = B^{-1} - B \Rightarrow X = (B^{-1} - B)\, B^{-1}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

32 **Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.**

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + bc & c^2 \end{pmatrix}$$

$$2X = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

De modo que:

$$\begin{cases} a^2 = 2a \\ 0 = 0 \\ ab + bc = 2b \\ c^2 = 2c \end{cases}$$

Se obtienen los siguientes resultados:

Si $a = 0, b \in \mathbb{R}, c = 2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

Si $a = 2, b \in \mathbb{R}, c = 0 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

33 **Dadas las siguientes matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla A^{-1}.

b) Calcula X, tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1}B(A^{-1})^t \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

34 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumpla $A \cdot X \cdot A = 2B \cdot A$.**

$X = A^{-1}2B$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

35 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica: $A \cdot X \cdot B = 2C$**

$X = A^{-1} \cdot 2 \cdot C \cdot B^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

36 **Dadas las matrices A, B y C, con inversa de orden n y dada la matriz I de orden n:**

a) Determina la matriz X para que tenga solución la ecuación $C \cdot (A + X) \cdot B = I$.

b) Aplica el resultado del apartado anterior para las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $CAB + CXB = I \Rightarrow CXB = I - CAB$

$\Rightarrow C^{-1}CXBB^{-1} = C^{-1}(I - CAB)B^{-1} \Rightarrow X = C^{-1}(I - CAB)B^{-1}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

37 **Calcula t para que el rango de esta matriz:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & t \end{pmatrix}$$

a) Sea 1. **b) Sea 2.** **c) Sea 3.**

a) $t = -2$

b) $t \neq -2$

c) Es imposible, ya que la primera y segunda filas son linealmente dependientes.

38 **Escribe tres matrices de dimensión 3 × 4 que tengan de rango 1, 2 y 3, respectivamente. Razona la respuesta.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

- Rango 1. Todas las filas son proporcionales:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 10 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

- Rango 2. La tercera fila es igual a la primera multiplicada por 2 más la segunda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- Rango 3. Las tres filas son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

39 **Calcula, por el método de Gauss, el rango de:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -5 & 10\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 5 & -1\\ 1 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & -5 & -4\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & -1\\ 0 & 7 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}4 & 5 & -1 & 6\\ 3 & 2 & 5 & 0\\ 7 & 7 & 4 & 6\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

rg(A) $=1$, la segunda fila es la primera por -5.

rg(B) $=3$, tres filas linealmente independientes.

rg(C) $=2$, la tercera fila es la suma de las otras dos.

rg(D) $=3$, tres filas linealmente independientes.

rg(E) $=3$, tres columnas linealmente independientes.

rg(F) $=4$, cuatro filas linealmente independientes.

Resolución y discusión de sistemas

40 **Calcula la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y usa el resultado para resolver $\begin{cases}x+y=1\\ y+z=-2\\ x+z=3\end{cases}$.**

La matriz inversa de A es:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Escribimos $X=A^{-1}\cdot B$, esto es:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$x=3,\ y=-2,\ z=0$$

41 **Resuelve por el método de la matriz inversa.**

a) $\begin{cases}x-y-z=2\\ -x+3z=-1\\ -2x+5y-3z=-7\end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases}x+2z=-3\\ 2x+3y+z=3\\ y+2z=-6\end{cases}$

a) La matriz de los coeficientes es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & 5 & -3\end{pmatrix}$$

y su matriz inversa:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}15 & 8 & 3\\ 9 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 8 & 3\\ 9 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$x=1,\ y=-1,\ z=0$$

b) La matriz de los coeficientes es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

y su matriz inversa:

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2 & -6\\ -4 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5 & 2 & -6\\ -4 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ -6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es:

$$x=3,\ y=0,\ z=-3$$

42 **La matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas tiene rango 3. ¿Qué se puede deducir acerca de las soluciones del sistema?**

El sistema es compatible determinado, luego tiene una única solución.

43 **La matriz ampliada de un sistema de ecuaciones, una vez escalonada por el método de Gauss es:**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

a) **¿Qué tipo de sistema es? Razona la respuesta.**

b) **Resuélvelo en caso de que sea compatible.**

a) Es un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.

b) El sistema que se debe resolver es:

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ y+2z=1\end{cases}$$

Tomando z como parámetro: $z=t$, se obtiene que la solución del sistema es:

$$\begin{cases}x=5t-2\\ y=1-2t\\ z=t\end{cases}$$

Ejercicios de aplicación

44 **Una matriz A es ortogonal si $A\cdot A^t=A^t\cdot A=I$. Comprueba que la siguiente matriz y su inversa son ortogonales:**

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

La matriz A es ortogonal, ya que:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

De igual forma se comprueba que: $A^t\cdot A=I$

La matriz inversa de A, A^{-1}, es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que $(A^{-1})^t\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot(A^{-1})^t=I$; luego A^{-1} también es ortogonal.

45 **Calcula las potencias *n*–ésimas de las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determina, utilizando la fórmula general, A^5, B^{40}, C^4 y D^{25}.

Las fórmulas generales son:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^5 = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4 \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

$$B^{40} = \begin{pmatrix} 1 & 40 & 40 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 128 & 128 \\ 128 & 128 \end{pmatrix}$$

$$D^{25} = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

46 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$:**

a) **Calcula $(A - I)^2 \cdot (A - 5I)$ siendo I la matriz identidad de orden 3.**

b) **Obtén A^t y razona si existe la inversa de A.**

a) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$;

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 \cdot (A - 5I) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Existe inversa porque las tres filas de la matriz son linealmente independientes.

47 **Dadas**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}:$$

a) **Calcula la matriz P que verifique $B \cdot P - A = C^t$.**

b) **Determina la dimensión de M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.**

c) **Halla la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.**

a) $B \cdot P - A = C^t \Rightarrow B^{-1} \cdot B \cdot P = B^{-1} \cdot (C^t + A) \Rightarrow P = B^{-1} \cdot (C^t + A)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^t + A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

b) A es de dimensión 2×3 y C es de dimensión 3×2. Para poder realizar el producto $A \cdot M$, M debe tener tres filas. Para poder realizar el producto $M \cdot C$, M debe tener tres columnas. Luego M debe ser de dimensión 3×3.

c) La matriz C tiene dimensión 3×2 luego su transpuesta tendrá dimensión 2×3, y para que sea posible el producto $C^t \cdot N$, N debe tener tres filas. Si además queremos que la matriz producto sea cuadrada N ha de tener dos columnas y así la matriz será de dimensión 3×2.

48 **Dadas las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Halla la matriz X tal que $A \cdot X = B$.**

b) **Calcula B^{100} y razona la respuesta.**

a) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se puede plantear:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a - 2c & 3b - 2d \\ -2a + c & -2b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando:

$$\begin{cases} 3a - 2c = 1 \\ 3b - 2d = 1 \\ -2a + c = 1 \\ -2b + d = 1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema agrupando las ecuaciones de incógnitas a y c, y b y d, y se obtiene $a = -3$, $c = -5$, $b = -3$ y $d = -5$, por lo que la matriz buscada es:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular B^{100}, empezamos calculando B^2:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$$

Como se observa $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, por lo que:

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 2^{99} & 2^{99} \\ 2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}$$

49 **Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (*A*), de cobre (*Q*) y de acero (*H*). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1 cm, 1,5 cm, 2 cm y 2,5 cm y tienen los siguientes precios en euros:**

Clavos *A*	0,02	0,03	0,04	0,05
Clavos *Q*	0,03	0,04	0,06	0,07
Clavos *H*	0,04	0,06	0,08	0,10

Sabiendo que en un minuto se producen:

De 1 cm de longitud	100*A*	50*Q*	700*H*
De 1,5 cm de longitud	200*A*	20*Q*	600*H*
De 2 cm de longitud	500*A*	30*Q*	400*H*
De 2,5 cm de longitud	300*A*	10*Q*	800*H*

a) **Resume la información anterior en dos matrices *M* y *N*. *M* será una matriz 3 × 4 que recoja la producción por minuto y *N*, una matriz 4 × 3 que recoja los precios.**

b) **Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz $M \cdot N$ y da su significado.**

c) **Haz lo mismo con la matriz $N \cdot M$.**

a) $M = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 500 & 300 \\ 50 & 20 & 30 & 10 \\ 700 & 600 & 400 & 800 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,03 & 0,04 \\ 0,03 & 0,04 & 0,06 \\ 0,04 & 0,06 & 0,08 \\ 0,05 & 0,07 & 0,10 \end{pmatrix}$

b) $M \cdot N$ es una matriz de 3×3.

$a_{11} = 100 \cdot 0,02 + 200 \cdot 0,03 + 500 \cdot 0,04 + 300 \cdot 0,05 = 43$ €, indica que se producen 43 € de clavos de aluminio por minuto.

$a_{22} = 50 \cdot 0,03 + 20 \cdot 0,04 + 30 \cdot 0,06 + 10 \cdot 0,07 = 4,8$ €, indica que se producen 4,80 € de clavos de cobre por minuto.

$a_{33} = 700 \cdot 0,04 + 600 \cdot 0,06 + 400 \cdot 0,08 + 800 \cdot 0,10 = 176$ €, indica que se producen 176 € de clavos de acero por minuto.

c) $N \cdot M$ es una matriz de 4×4

$a_{11} = 0,02 \cdot 100 + 0,03 \cdot 200 + 0,04 \cdot 700 = 31,50$ €, indica que se producen 31,5 € de clavos de 1 cm por minuto.

$a_{22} = 0,03 \cdot 200 + 0,04 \cdot 20 + 0,06 \cdot 600 = 42,80$ €, indica que se producen 42,8 € de clavos de 1,5 cm por minuto.

$a_{33} = 0,04 \cdot 500 + 0,06 \cdot 30 + 0,08 \cdot 400 = 53,80$ €, indica que se producen 53,8 € de clavos de 2 cm por minuto.

$a_{44} = 0,05 \cdot 300 + 0,07 \cdot 10 + 0,10 \cdot 800 = 95,70$ €, indica que se producen 95,7 € de clavos de 2,5 cm por minuto.

50 **Una empresa fabrica tres tipos de artículos: *A*, *B* y *C*. Los precios de coste de cada unidad son, respectivamente, 3 €, 6 € y 8,60 €. Los correspondientes precios de venta por unidad son 10,80 €, 16,80 € y 24 €. El número de unidades vendidas anualmente es de 2 240, 1 625 y 842, respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos, *C* e *I*, son diagonales, y que la matriz de ventas, *V*, es una matriz fila.**

a) **Determina las matrices *C*, *I* y *V*.**

b) **Obtén, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales de los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales.**

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8,6 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 10,8 & 0 & 0 \\ 0 & 16,8 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$

$V = (2\,240 \quad 1\,625 \quad 842)$

b) La matriz de beneficios es:

$B = \begin{pmatrix} 7,8 & 0 & 0 \\ 0 & 10,8 & 0 \\ 0 & 0 & 15,4 \end{pmatrix}$

La matriz de gastos anuales es:

$V \cdot C = (2\,240 \quad 1\,625 \quad 842) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8,6 \end{pmatrix} =$

$= (6\,720 \quad 9\,750 \quad 7\,241,2)$

La matriz de ingresos anuales es:

$V \cdot I = (2\,240 \quad 1\,625 \quad 842) \cdot \begin{pmatrix} 10,8 & 0 & 0 \\ 0 & 16,8 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} =$

$= (24\,192 \quad 27\,300 \quad 20\,208)$

La matriz de beneficios anuales es:

$V \cdot B = (2\,240 \ \ 1\,625 \ \ 842) \begin{pmatrix} 7,8 & 0 & 0 \\ 0 & 10,8 & 0 \\ 0 & 0 & 15,4 \end{pmatrix} =$

$= (17\,472 \quad 17\,550 \quad 12\,966,80)$

Los beneficios anuales también se podrían calcular haciendo $V \cdot I - V \cdot C$.

51 **En una academia de idiomas se imparte inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos normales y reducidos. La matriz *A* expresa el número de personas de cada grupo; la primera columna corresponde a los grupos de inglés y la segunda a los de alemán, y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto, respectivamente:**

$$A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz *B*, por su parte, reflejan el porcentaje de estudiantes —común para ambos idiomas— en cada uno de los niveles; la primera fila indica los alumnos que siguen el curso reducido, y la segunda, los que siguen el curso normal:

$$B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,4 & 0,75 \\ 0,8 & 0,75 & 0,6 & 0,25 \end{pmatrix}$$

a) **Obtén la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.**

b) **Sabiendo que la academia cobra 30 € por persona en grupos reducidos y 20 € por persona en grupos normales, halla la cantidad ingresada por cada uno de los idiomas.**

a) La matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma es $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \text{Inglés} & \text{Alemán} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Reducido} \\ \text{Normal} \end{array} \end{array}$$

b) Tenemos que multiplicar el vector fila $(30 \quad 20)$ por la matriz $B \cdot A$:

$$(30 \ \ 20) \cdot \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Inglés} & \text{Alemán} \end{array} \\ (13\,350 \quad 10\,090) \end{array}$$

52 **Según el Institut Valencià d'Estadística, durante el año 1995 se celebraron en Alicante 5 809 matrimonios católicos, 1 540 civiles y 8 según otros ritos distintos de los dos anteriores. Durante ese mismo año, las cifras en Castellón fueron 2 003, 486 y 3 matrimonios, respectivamente, mientras que en Valencia se registraron 8 866 matrimonios católicos, 2 769 civiles y 37 según otros ritos.**

a) **Construye una matriz de orden 3 × 3 que describa el número de matrimonios que tuvieron lugar en Alicante, Castellón y Valencia, según la forma de celebración.**

b) **Obtén una matriz tal que, al multiplicarla por la anterior, resulte otra con el número total de matrimonios celebrados en Alicante, Castellón y Valencia.**

c) **Construye una matriz tal que, al multiplicarla por la del apartado *a)*, resulte otra con el número de matrimonios católicos y con el número de matrimonios civiles celebrados en Alicante, Castellón y Valencia.**

a) $M = \begin{pmatrix} 5\,809 & 2\,003 & 8\,866 \\ 1\,540 & 486 & 2\,769 \\ 8 & 3 & 37 \end{pmatrix}$

b) $(1 \;\; 1 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 5\,809 & 2\,003 & 8\,866 \\ 1\,540 & 486 & 2\,769 \\ 8 & 3 & 37 \end{pmatrix} = (7\,357 \;\; 2\,492 \;\; 11\,672)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\,809 & 2\,003 & 8\,866 \\ 1\,540 & 486 & 2\,769 \\ 8 & 3 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,809 & 2\,003 & 8\,866 \\ 1\,540 & 486 & 2\,769 \end{pmatrix}$

53 **Demuestra que cualquier matriz cuadrada se puede descomponer en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.**

Aplica el razonamiento y descompón la matriz siguiente en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Llamamos S a la matriz cuadrada simétrica, y H a la matriz cuadrada antisimétrica. La matriz A se podrá escribir:

$$A = S + H$$

Trasponiendo la igualdad anterior:

$A^t = (S + H)^t = S^t + H^t = S - H$, ya que $H^t = -H$, al ser H antisimétrica.

Resolviendo el sistema matricial: $\begin{cases} A = S + H \\ A^t = S - H \end{cases}$

podemos escribir:

$$S = \frac{A + A^t}{2} \quad \text{y} \quad H = \frac{A - A^t}{2}$$

Sustituyendo en las dos identidades anteriores la matriz A resulta:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

54 **Dada la siguiente matriz:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **su matriz inversa es:**

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La respuesta correcta es la ***c)***. Veámoslo:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

55 **Dadas las siguientes matrices:**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ tiene por solución:

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

La respuesta correcta es la ***b)***. Veámoslo:

Escribimos $X = M^{-1} \cdot (P - N)$, siendo:

$$M^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

56 **Dadas estas matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz X que verifica la ecuación $BX - A = 2X$ es la siguiente:

a) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ***c)*** $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

La respuesta correcta es la ***a)***. Veámoslo:

$$BX - 2X = A \Rightarrow (B - 2I)X = A \Rightarrow X = (B - 2I)^{-1} A$$

$$(B - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

57 **Dada la siguiente matriz:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ t & 4 & 14 \\ 4 & 5t-2 & 28 \end{pmatrix}$ **el rango de** A **en función de** t **es:**

a) **Si** $t = 2$, $\text{rg}(A) = 2$; **si** $t \neq 2$, $\text{rg}(A) = 3$.

b) **Si** $t \neq 2$, $\text{rg}(A) = 1$; **si** $t \neq 2$, $\text{rg}(A) = 3$.

c) **Si** $t = 1$, $\text{rg}(A) = 1$; **si** $t \neq 1$, $\text{rg}(A) = 3$.

La respuesta correcta es la ***b).*** Veámoslo:

Triangulamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ t & 4 & 14 \\ 4 & 5t-2 & 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t & 4 & 14 \\ 4 & 5t-2 & 28 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t & 4 & 14 \\ 4 & 5t-2 & 28 \\ 0 & 5t-10 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & t & 4 \\ 28 & 4 & 5t-2 \\ 0 & 0 & 5t-10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & t & 4 \\ 0 & 4-2t & 5t-10 \\ 0 & 0 & 5t-10 \end{pmatrix}$$

Si $5t - 10 = 0 \Rightarrow t = 2$, entonces la última fiLa es nula.

Veamos que ocurre con la segunda fila: sabemos que $a_{23} = 0$ por ser $t = 2$, y $a_{22} = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. De modo que si $t = 2$ la segunda fila es también nula y solo habría una fila no nula, de modo que el rango sería 1.

Si $t \neq 2$ no se anula ninguna fila y por tanto el rango de la matriz es 3.

Evaluación (página 57)

1. Calcula el producto de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&9&0\\15&-4&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&5&-4\\5&9&0\\15&-4&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7&1&2\\-6&6&7\\10&-5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-70&50&43\\-19&59&73\\169&-29&-6\end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices A y B, calcula X para que se cumpla $A\cdot X-B=I$.

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}5&-1\\-2&-3\end{pmatrix}$$

$A\cdot X-B=I\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(I+B)$

$$I+B=\begin{pmatrix}6&-1\\-2&-2\end{pmatrix};\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&\frac{-3}{2}\end{pmatrix}$$

Luego: $X=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&\frac{-3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&-1\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\9&2\end{pmatrix}$

3. Calcula la matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss para obtener la inversa de la matriz A, y se obtiene:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

4. Una fábrica produce tres tipos de artículos, A_1, A_2 y A_3, y distribuye su producción entre cuatro clientes. En el mes de marzo, el primer cliente ha adquirido 9 unidades de A_1, 5 de A_2 y 2 de A_3; el segundo cliente, 3, 8 y 10 unidades, respectivamente; el tercer cliente no compró nada, y el cuarto, 6, 7 y 1 unidades, respectivamente. En abril, el cuarto cliente no hizo pedido alguno, el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, mientras que los otros dos duplicaron el número de unidades adquiridas en marzo.

a) **Construye las matrices 4 × 3 correspondientes a las ventas de marzo y abril.**

b) **Si los precios de los artículos, en euros, por unidad son 60, 48 y 54, respectivamente, calcula lo que factura la fábrica a cada cliente por sus pedidos en los meses de marzo y abril.**

a) Mes de marzo: $\begin{pmatrix}9&5&2\\3&8&10\\0&0&0\\6&7&1\end{pmatrix}$ Mes de abril: $\begin{pmatrix}18&10&4\\6&16&20\\4&4&4\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) Facturación de marzo: $F_m=\begin{pmatrix}9&5&2\\3&8&10\\0&0&0\\6&7&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}60\\48\\54\end{pmatrix}=(888\quad 1\,104\quad 0\quad 750)$

Al cliente número uno, le factura 888 €; al número dos, 1 104 €; al tres, 0 €, y al cuarto, 750 €.

Facturación de abril: $F_a=\begin{pmatrix}18&10&4\\6&16&20\\4&4&4\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}60\\48\\54\end{pmatrix}=(1\,776\quad 2\,208\quad 648\quad 0)$

Al cliente número uno, le factura 1 776 €; al cliente número dos, 2 208 €; al cliente número tres, 648 €, y al cliente número cuatro, 0 €.

5. Calcula el rango de esta matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3 \cdot F_1]{F_2 - 2 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2 \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $\text{rg}(A) = 2$

6. Halla el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y + 4z &= 0 \\ -x + y + 2z &= 9 \end{aligned} \right.$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - 2 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \cdot F_3 + 2 \cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Luego: $\text{rg}(A) = 3$

Calculamos el rango de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - 2 \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \cdot F_3 + 2 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 13 & 25 \end{array}\right)$$

Luego: $\text{rg}(A^*) = 3$