

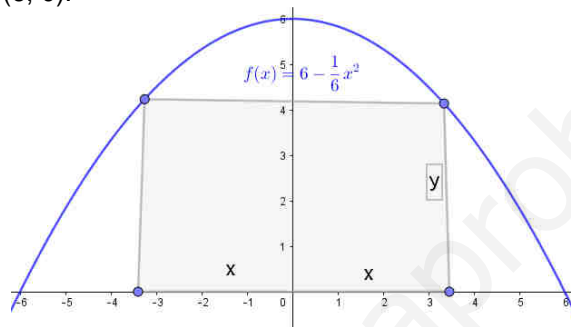
Opción A**Ejercicio 1 opción A, Septiembre 2019 (modelo 4)**

[2'5 puntos] Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones de un rectángulo de área sea máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

Solución

Es un problema de optimización.

Un pequeño esbozo de la gráfica nos ayudará. $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$ es una parábola parecida a la parábola " $-x^2$ " (ramas hacia abajo \cap), abscisa del vértice es la solución de $f'(x) = 0 = -2x/6 = -x/3 \rightarrow x = 0$ y $f(0) = 6$, luego el vértice en $(0, 6)$, y corte con OX $\rightarrow f(x) = 0 = 6 - \frac{1}{6}x^2 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$, y los puntos de corte son con OX $(-6, 0)$ y $(6, 0)$.



Función a optimizar Área = $(2x) \cdot y$

Relación entre las variables $y = 6 - (x^2)/6$.

Función a optimizar $A(x) = (2x) \cdot (6 - (x^2)/6) = (-2x^3)/6 + 12x = -x^3/3 + 12x$.

Recordamos que si $A'(a) = 0$ y $A''(a) < 0$, en $x = a$ hay un máximo relativo.

$A(x) = -x^3/3 + 12x$. $A'(x) = -x^2 + 12$.

De $A'(x) = 0$, tenemos $0 = -x^2 + 12 \rightarrow x^2 = 12$ y sus soluciones son $x = \pm\sqrt{12}$. Como son longitudes la única solución válida es $x = +\sqrt{12}$, que será el posible máximo.

$A'(x) = -x^2 + 12$. $A''(x) = -2x$.

Como $A''(+\sqrt{12}) = -2 \cdot \sqrt{12} < 0$, luego $x = +\sqrt{12}$ es un máximo.

Las **dimensiones del rectángulo** pedido son **base** = $2x = 2 \cdot \sqrt{12}$ u¹ y **altura** $y = 6 - (\sqrt{12})^2/6 = 4$ u¹.

Ejercicio 2 opción A, Septiembre 2019 (modelo 4)

[2'5 puntos] Determina la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por $(1,0)$.

Solución

Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI).- Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces la función $G(x) = \int_a^x [f(t)] dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = (\int_a^x [f(t)] dt)' = f(x)$

En la práctica $f(x) = \int f'(x) dx$; $f''(x) = \int f'''(x) dx$; $f'''(x) = \int f^{(4)}(x) dx$, etc....

Una primitiva es $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} \end{array} \right\} = \ln(x) \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} - \int \frac{x^{1/2}}{1/2} \cdot \frac{dx}{x} =$

$= 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \cdot \int x^{-1/2} \cdot dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} + K = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + K$.

Tenemos $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + K$. Como nos dicen que pasa por el punto $(1, 0)$ tenemos $f(1) = 0$, es decir $f(1) = 0 = 2\sqrt{1} \cdot \ln(1) - 4\sqrt{1} + K = 0 - 4 + K$, luego $K = 4$ y la función es $f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + 4$.

Ejercicio 3 opción A, Septiembre 2019 (modelo 4)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{cases}$$

- a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de "m".
b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (m+2)x + y - z = m \\ 3x + (m+2)y + z = m \end{cases}$$

- a)
Discute el sistema según los valores de "m".

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$.

Tenemos $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_1+2F_2 \\ F_3+F_2 \end{array} = \begin{vmatrix} 2m+5 & 3 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 \\ m+5 & m+3 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} =$
 $= 0 - (-1) \cdot [(2m+5) \cdot (m+3) - (3) \cdot (m+5)] + 0 = 2m^2 + 11m + 15 - 3m - 15 = 2m^2 + 8m$.

De $\det(A) = 0 \rightarrow 2m^2 + 8m = 0 = m \cdot (2m + 8)$, de donde $m = 0$ y $m = -4$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -4$, $\det(A) \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ = número de incógnitas, **sistema compatible y determinado, y tiene solución única**. Por el Teorema de Rouché.

Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*)$, porque A^* tiene la cuarta columna de ceros..

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2 \cdot F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-1) \cdot (2) = -2 \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como **$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3$** , el **sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución**. Por el Teorema de Rouché.

Si $m = -4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_3 \\ F_2 - F_3 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-4)(3+5) = -32 \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como **$\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$** , el **sistema es incompatible y no tiene solución**. Por el Teorema de Rouché.

- b)
Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 0$.

Hemos visto en el apartado (a) que si $m = 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3$, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución.

Por tener rango 2 utilizamos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, que son con las que hemos calculado el menor de orden 2 de A distinto de cero)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad (F_2 - F_1) \approx \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases} \text{ Llamando } \mathbf{z} = \mathbf{m} \in \mathbb{R} \text{ tenemos } \mathbf{x} = \mathbf{3m}. \text{ Entrando en la primera}$$

ecuación $2(3m) + y + 2(m) = 0$, de donde $y = -8m$, y la solución del sistema es $(x, y, z) = (3m, -8m, m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, Septiembre 2019 (modelo 4)

Sean los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -2, -1)$ y $\mathbf{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de α y β para los que \mathbf{w} es ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} .

(b) [0'75 puntos] Determina los valores de α y β para los que \mathbf{w} y \mathbf{u} tienen la misma dirección.

(c) [1 punto] Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que \mathbf{w} es combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Solución

Sean los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -2, -1)$ y $\mathbf{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.

(a)

Determina los valores de α y β para los que \mathbf{w} es ortogonal a \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Si los vectores son ortogonales su producto escalar (\bullet) es cero.

$$\mathbf{w} \bullet \mathbf{u} = 0 = (2, \alpha, \beta) \bullet (1, 2, 3) = 2 + 2\alpha + 3\beta = 0.$$

$$\mathbf{w} \bullet \mathbf{v} = 0 = (2, \alpha, \beta) \bullet (1, -2, -1) = 2 - 2\alpha - \beta = 0. \text{ Sumando } 4 + 2\beta = 0, \text{ de donde } \beta = -2.$$

Entrando en la segunda tenemos $2 - 2\alpha - (-2) = 0 \rightarrow 4 - 2\alpha = 0$, de donde $\alpha = 2$.

(b)

Determina los valores de α y β para los que \mathbf{w} y \mathbf{u} tienen la misma dirección.

Si \mathbf{w} y \mathbf{u} tienen la misma dirección sus coordenadas son proporcionales, luego $2/1 = \alpha/2 = \beta/3 = 2$.

De $\alpha/2 = 2$, tenemos $\alpha = 4$. De $\beta/3 = 2$, tenemos $\beta = 6$.

(c)

Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que \mathbf{w} es combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Sabemos que si \mathbf{w} es combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} , los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son linealmente dependientes, por

$$\text{tanto } \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & \alpha & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & \alpha - 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = -8 + 4\alpha - 16 = 0 = 4\alpha - 24 = 0, \text{ de donde } \alpha = 8.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Septiembre 2019 (modelo 4)

$$[2'5 \text{ puntos}] \text{ Se sabe que la función } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Solución

$$[2'5 \text{ puntos}] \text{ Se sabe que la función } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Sabemos que si una función es derivable también es continua, por tanto nuestra función f es continua y derivable en $x = 0$.

$$\text{Como es continua en } x = 0, f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin(x) + ax + b) = \sin(0) + a(0) + b = 0 + 0 + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(0+1)}{0} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0};$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

La regla se puede repetir y también para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \rightarrow \infty$.

Con lo cual tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1) \cdot 1} = \frac{1}{(0+1) \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Igualando $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, resulta **b = 1**.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases};$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1) \cdot 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \cos(x) + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiaremos la continuidad de la derivada en $x = 0$, es decir $f'(0^-) = f'(0^+)$ con $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ y $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

Empezamos $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos(x) + a) = \cos(0) + a = 1 + a$.

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{0 - \ln(0+1)}{0^2} = \frac{0}{0}, \text{ le aplicamos la regla de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \{L'H\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x+1)}{2x \cdot (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x \cdot (x+1)^2} =$$

$$= \{Simplifico "x"\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{-1}{2 \cdot (0+1)^2} = \frac{-1}{2}.$$

Igualando $f'(0^-) = f'(0^+)$, tenemos $1 + a = -1/2 \rightarrow a = -1 - 1/2 = -3/2$. Por tanto **a = -3/2** y **b = 1**.

Ejercicio 2 opción B, Septiembre 2019 (modelo 4)

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

a) [1'25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1'25 puntos] Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Solución

Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

a)

Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Puntos de corte:

Para $x = 0$, $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$, punto $(0,0)$.

Para $f(x) = x \cdot e^{-x^2} = 0$, tenemos $x = 0$ (la exponencial no se anula nunca). Punto $(0, 0)$, **el único punto de corte con los ejes es el $(0, 0)$** .

Estudiamos los extremos con la monotonía

Tenemos $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, y su derivada es $f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$.

Recordamos que los extremos anulan la primera derivada.

De $f'(x) = 0$ tenemos $1 - 2x^2 = 0$ (la exponencial no se anula nunca), de donde $x^2 = 1/2 \rightarrow x = \pm\sqrt{1/2} \cong \pm 0'707$ que serán los posibles extremos.

Como $f'(-1) = (+) \cdot (1 - 2(-1)^2) = (+) \cdot (-1) < 0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-\infty, -\sqrt{1/2})$

Como $f'(0) = (+) \cdot (1 - 2 \cdot (0)^2) = (+) \cdot (+1) > 0$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-\sqrt{1/2}, +\sqrt{1/2})$

Como $f'(1) = (+) \cdot (1 - 2(1)^2) = (+) \cdot (-1) < 0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(+\sqrt{1/2}, +\infty)$

Por definición en $x = -\sqrt{1/2}$ hay un mínimo relativo que vale $f(-\sqrt{1/2}) = (-\sqrt{1/2}) \cdot e^{-(\sqrt{1/2})^2} = (-\sqrt{1/2}) \cdot e^{-1/2} \cong -0'43$

Por definición en $x = \sqrt{1/2}$ hay un máximo relativo que vale $f(\sqrt{1/2}) = (\sqrt{1/2}) \cdot e^{-(\sqrt{1/2})^2} = (\sqrt{1/2}) \cdot e^{-1/2} \cong 0'43$

b)

Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Dada $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ como la exponencial siempre es positiva, tenemos que si $x > 0$ entonces $f(x) > 0$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x \cdot e^{-x^2} \cdot dx = \begin{cases} -x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x dx = -dt/2 \end{cases} = \int \frac{e^t(-dt)}{2} = \frac{-e^t}{2} + K = \frac{-e^{-x^2}}{2} + K$$

$$\text{Área} = (1/4) = \left[\frac{-e^{-x^2}}{2} + K \right]_0^a = \frac{-e^{-a^2}}{2} + K - \frac{-e^0}{2} - K = \frac{-e^{-a^2}}{2} + \frac{1}{2}, \text{ de donde } \frac{1}{4} = \frac{-e^{-a^2}}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-e^{-a^2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

$\rightarrow e^{-a^2} = \frac{1}{2}$. Como la exponencial e^x es la recíproca del logaritmo neperiano $\rightarrow -a^2 = \ln(1/2) \cong -0'69347$, de

donde $a^2 = -\ln(1/2) \cong 0'69347 \rightarrow a = \pm\sqrt{-\ln(1/2)}$. Como piden la solución positiva tenemos que $a = +\sqrt{-\ln(1/2)} \cong 0'835546$

Ejercicio 3 opción B, Septiembre 2019 (modelo 4)

[2'5 puntos] Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución

Calcula en grados los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Llamamos "x" al ángulo menor.

Llamamos "y" al ángulo mayor.

Llamamos "z" al otro ángulo.

$x + y + z = 180^\circ$ (La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°)

De "el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor", tenemos $x = y/2$.

De "la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo" tenemos $x + y = 2z$.

Entrando con $x + y = 2z$ en $x + y + z = 180^\circ$, tenemos $2z + z = 180^\circ = 3z$, luego $z = 60^\circ$.

Tenemos $x + y = 120^\circ$ y además $y = 2x$, luego $x + 2x = 120^\circ = 3x$, luego $x = 40^\circ$ e $y = 2(40^\circ) = 80^\circ$.

Los tres ángulos del triángulo son $x = 40^\circ$ (el pequeño), $y = 80^\circ$ (el mayor) y $z = 60^\circ$ (el otro).

Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2019 (modelo 4)

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

(a) [1'25 puntos] Halla "k" sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

(b) [1'25 puntos] Para "k = 1", halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

(a)

Halla "k" sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.

De cada recta tomamos un punto y un vector.

De la recta "r" tenemos el punto $A = (2, k, 0)$ y el vector $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$

De la recta "s" tenemos el punto $B = (-1, 1, 3)$ y el vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$.

Evidentemente los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} no son proporcionales, por tanto las rectas r y s se cruzan o se cortan. La condición para que se corten, es que los vectores \mathbf{AB} , \mathbf{u} y \mathbf{v} sean coplanarios es decir $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Calculamos $\mathbf{AB} = (-3, 1-k, 3)$, luego $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} -3 & 1-k & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2-k & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} = \\ \text{fila} \end{array}$

$= 0 = (-1) \cdot (-6 - 3k - 0) - 0 + 0 = 6 + 3k = 0$, de donde $\mathbf{k = -2}$ para que las rectas se corten en un punto.

(b)

Para "k = 1", halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Para un plano π necesitamos un punto, el $A = (2, 1, 0)$, y dos vectores independientes, uno el $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ (esto es porque el plano contiene a "r"), y el otro vector es el $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ (al ser paralelo a la recta "s").

La ecuación paramétrica del plano es el conjunto de puntos $X(x, y, z)$ del espacio que verifican:

$\pi \equiv (x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda \cdot (1, 2, 2) + \mu \cdot (-1, 1, 1)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Como nos piden la ecuación general tenemos $\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = \\ \text{fila} \end{array}$

$= (x-2)(2-2) - (y-1)(1+2) + (z)(1+2) = -3y + 3z + 3 = 0 = -y + z + 1 = 0$.