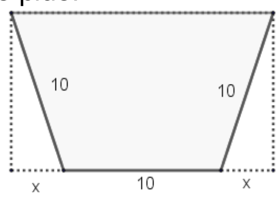
.Opción A

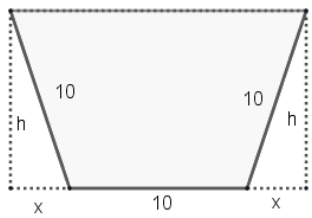
Ejercicio 1 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:



a) [0,25 puntos] Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).
b) [0,75 puntos] Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.
c) [1,5 puntos] Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.

Solución



Es un problema de optimización.
a)
Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).

Tenemos un triángulo rectángulo y aplicamos el Teorema Pitágoras $10^2 = h^2 + x\sqrt{100 - x^2}$

$$h = \pm\sqrt{100 - x^2} = \left\{\begin{matrix}\text{Cómo es} \\ \text{longitud}\end{matrix}\right\} = +\sqrt{100 - x^2}$$

b)
Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.

Área de la sección = (área del rectángulo) – 2·(área triángulo) =
= (base rectángulo·altura) – 2·((1/2)·base triángulo·altura) = (10 + 2x)·h – (x·h) =
$= (10 + 2x)\cdot\sqrt{100 - x^2} - x\cdot\sqrt{100 - x^2} = A(x)$
c)
Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.
La función a optimizar es el área = $A(x) = (10 + 2x)\cdot\sqrt{100 - x^2} - x\cdot\sqrt{100 - x^2}$.

Sabemos que si f '(b) = 0 y f ''(b) < 0, x = b es un máximo relativo de f(x).

Derivando tenemos: $A'(x) = 2\cdot\sqrt{100 - x^2} + (10 + 2x)\cdot\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) - 1\cdot\sqrt{100 - x^2} - x\cdot\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}\right) =$

$$= 2\cdot\sqrt{100 - x^2} - \left(\frac{10x + 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) - \sqrt{100 - x^2} + \left(\frac{x^2}{\sqrt{100 - x^2}}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot(100 - x^2) - 10x - 2x^2 - (100 - x^2) + x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

De A ' (x) = 0 tenemos: $-2x^2 - 10x + 100 = 0 \rightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$, de donde **x = 5** y x = -10 (no vale porque las longitudes son positivas)

Veamos que es un máximo. De $A''(x) = \dfrac{(-4x - 10)\cdot\sqrt{100 - x^2} - (-2x^2 - 10x + 100)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2}$, tenemos

$A''(5) = \dfrac{(-30)\cdot\sqrt{75} - (0)}{\left(\sqrt{75}\right)^2} \cong -3'46 < 0$, **luego x = 5 cm es un máximo relativo de A(x).**

Ejercicio 2 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

[2'5 puntos] Determina la función f : (1+∞) → R sabiendo que $f''(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 es y = x + 2.

Solución

Aplicamos el Teorema Fundamental del Calculo Integral (TFCI), que nos dice: Si f(x) es continua en [a,b] entonces la función $G(x) = \int_a^x [f(t)]dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = (\int_a^x [f(t)]dt)' = f(x)$.

En la práctica $f(x) = \int f'(x)dx$; $f'(x) = \int f''(x)dx$; $f''(x) = \int f'''(x)dx$, etc…..

Cómo nos dicen que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 es y = x + 2, por un lado tenemos que f '(2) = y ' = 1, y por orro f(2) = y(2) = (2) + 2 = 4, pues en el punto de tangencia coinciden.

Tenemos $f'(x)dx = \int f''(x)dx = \int \dfrac{dx}{(x-1)^2} = \left\{\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right\} = \int \dfrac{dt}{t^2} = \int t^{-2}\cdot dt = \dfrac{t^{-2+1}}{-2+1} + K = \dfrac{-1}{t^1} + K = \dfrac{-1}{x-1} + K$.

De f '(2) = 1 → 1 = -1/(2-1) + K → K = 2, luego $f'(x) = \dfrac{-1}{x-1} + 2$

Por el TFCI, $f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(\dfrac{-1}{x-1} + 2\right)dx = -\ln|x-1| + 2x + L$, como f(0) = 1 tenemos:

De f (2) = 4 → 4 = -ln(2 – 1) + 2·(2) + L → L = 0, **luego f(x) = - ln(x -1) + 2x**.

Ejercicio 3 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula A^{2018}.
b) [1'5 puntos] Determina, si existe, la matriz X que verifica A(X + 2I) = BC donde I es la matriz identidad

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a)
Calcula A^{2018}.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^4 = A^2\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aunque la demostración correcta es por el método de inducción, se ve que $A^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 2018 & 2018 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b)
Determina, si existe, la matriz X que verifica A(X + 2I) = BC donde I es la matriz identidad

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. (En una matriz triangular su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal), existe su matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

De A(X + 2I) = BC, tenemos A·X + 2A = BC, de donde A·X = BC – 2A.

Multiplicando ambos miembros de la igualdad $A\cdot X = BC - 2A$ por la izquierda por A^{-1} tenemos:
$A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot(BC - 2A) \rightarrow I_3\cdot X = A^{-1}\cdot(BC) - 2A^{-1}\cdot A \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(BC) - 2\cdot I_3}$.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(BC) - 2\cdot I_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) - 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción A, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$.

a) [1 punto] Estudia y determina la posición relativa de r y s.
b) [1,5 puntos] Determina la recta perpendicular común a r y a s.

Solución

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$.

a)
Estudia y determina la posición relativa de r y s.

De la recta "r" tomamos un punto, el A y un vector director, el **u.**
Para el punto tomo y = 0, con lo cual x = 7 y z = 3. Punto A(7,0,3).
El vector **u** lo calculo como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta "r", es decir $\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0+2) - \mathbf{j}(0+1) + \mathbf{k}(2-1) = (2, -1, 1)$.

De la recta "s" tomamos un punto, el B y un vector director, el **v.**
Para el punto tomo z = 0, con lo cual x = 2 e y = -3. Punto B(2,-3,0).
El vector **v** lo calculo como el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta "s", es decir $\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(1-0) = (0, 0, 1)$

Como los vectores **u** = (2, -1, 1) de "r" y **v** = (0, 0, 1) de "s" no son proporcionales, los vectores **u** y **v** no son paralelos, por tanto las rectas "r" y "s" tampoco lo son, luego "r" y "s" se cortan o se cruzan.

Si det(**AB**, **u**, **v**) = 0, "r" y "s" se cortan, con **AB** = **b** – a = (2, -3, 0) - (7, 0, 3) = (-5, -3, -3)
Si det(**AB**, **u**, **v**) $\neq$ 0, "r" y "s" se cruzan.

Como det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= +(1)\cdot(5 + 6) = 11 \neq 0$, luego las rectas **"r" y "s" se cruzan.**

b)
Determina la recta perpendicular común a r y a s.

Un punto A de "r" es A(7,0,3) y un vector director es **u** = (2, -1, 1).
Un punto B de "s" es B(2,-3,0) y un vector director es **v** = (0, 0, 1).

De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico $P(x,y,z) = P(7+2\lambda, 0 - \lambda, 3+\lambda) = P(7+2\lambda, -\lambda, 3+\lambda)$
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico $Q(x,y,z) = Q(2, -3, 0+\mu) = Q(2, -3, \mu)$

El vector **PQ** tiene que ser perpendicular al vector director de "r" **u** y al vector director de "s" **v** a la vez, es

decir su producto escalar (•) tiene que ser cero:
PQ = (2-7-2λ, -3+λ,μ-3-λ) = (-5 -2λ, -3 + λ, -3 - λ + μ)
PQ•u = 0 = (-5 -2λ, -3 + λ, -3 - λ + μ)•(2,-1,1) = 0 = -10 - 4λ + 3 - λ - 3 - λ + μ = -10 - 6λ + μ = 0.
PQ•v = 0 = (-5 -2λ, -3 - λ, -3 - λ + μ)•(0,0,1) = 0 = -3 - λ + μ $\rightarrow$ μ = 3 + λ

Sustituyendo μ = 3 + λ en -10 - 6λ + μ = 0 tenemos -10 - 6λ + 3 + λ = 0 $\rightarrow$ -7 - 5λ = 0, de donde λ = -7/5 y μ = 3 + (-7/5) = 8/5.

Ya tenemos los valores de "λ" y "μ".

Entrando en el punto genérico P con el valor de λ = -7/5, obtenemos el punto P determinado que es P(7+2(-7/5), - (-7/5), 3+(-7/7)) = P(21/5, 7/5, 8/5)

Entrando en el punto genérico Q con el valor de μ = 8/5, obtenemos el punto Q determinado que es Q(2, -3, (8/5)) = Q(2, -3, 8/5)

La recta perpendicular a ambas pedida, "t", es la que pasa por los punto P y Q, es decir t(Q;**PQ**)

Punto Q(2, -3, 8/5), vector **PQ** = (2, -3, 8/5) - (21/5, 7/5, 8/5) = (-11/5, -22/5, 0). Otro vector paralelo de la recta perpendicular pedida sería el **w** = (1, 2, 0)

La recta pedida en forma vectorial es t $\equiv$ (x,y,z) = (2, -3, 2/5) + δ(1, 2, 0) con $\delta \in$ R.

*Con este método es fácil tener errores de cálculo, a veces es útil dar la recta perpendicular como corte de dos planos π_1 y π_2. Donde π_1 contiene a la recta r y a la dirección perpendicular **uxv**, y π_2 contiene a la recta s y a la dirección perpendicular **uxv**.*

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$
a) [0,75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
c) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Solución

Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Como el denominador se anula para x = 1, si $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, x = 1 será asíntota vertical de f(x).

Tenemos $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{e^x}{x-1}\right) = \dfrac{e^1}{1^+-1} = \dfrac{e}{0^+} = +\infty$, luego **la recta x = 1 es una asíntota vertical de la gráfica de f.**

Para la posición relativa $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{e^x}{x-1}\right) = \dfrac{e^1}{1^--1} = \dfrac{e}{0^-} = -\infty$

Veamos la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.
Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla sirve también para $\dfrac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \to \infty$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x-1}\right) = \left\{\dfrac{e^{+\infty}}{+\infty} = \dfrac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{1}\right) = \dfrac{+\infty}{1} = +\infty$, **la gráfica de f <u>no</u> tiene asíntota horizontal en +∞.**

Tampoco tiene asíntota oblicua y = mx + n, en +∞, porque al calcular m = $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2 - x}\right)$ nos saldría, al aplicar dos veces la Regla de L'Hôpital +∞/2 = + ∞.

b)
Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Me piden la monotonía. Estudio de f '(x)

$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$; $f'(x) = \frac{e^x\cdot(x-1) - e^x\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$.

De f '(x) = 0, tenemos $e^x\cdot(x – 2) = 0$, {es cero el numerador} tenemos (x – 2) = 0 (sabemos que la exponencial e^x nunca se anula), de donde x = 2, que será el posible extremo relativo.

Como $f'(0) = \frac{e^0\cdot(0-2)}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} < 0$, **f es estrictamente decreciente** (↘) **en (-∞,2) – {1}.**

Como $f'(3) = \frac{e^3\cdot(3-2)}{(3-1)^2} = \frac{e^3}{4} > 0$, **f es estrictamente creciente** (↗) **en (2,+∞).**

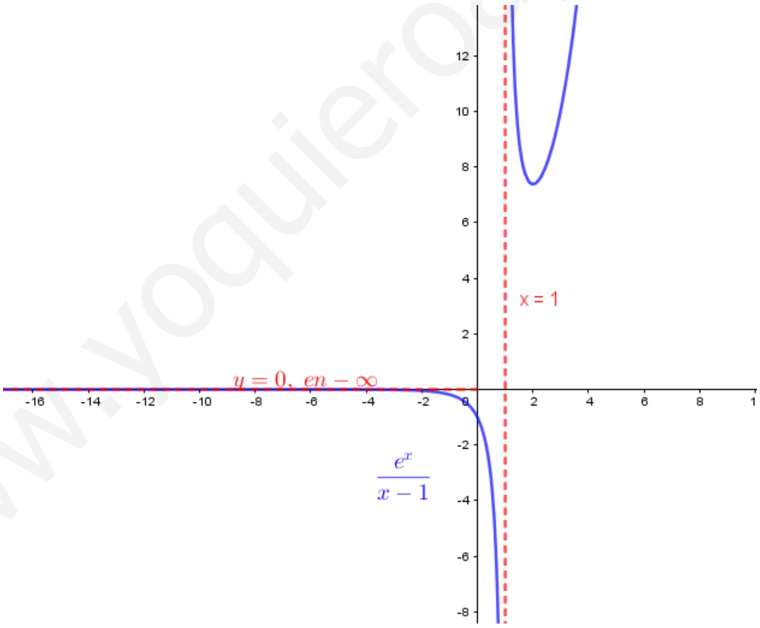
Por definición **x = 2 es un mínimo relativo y vale f(2) =** $\frac{e^2}{2-1}$ **=** $e^2 \cong$ **7'4.**

c)
Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Para x = 0, tenemos $f(0) = \frac{e^0}{0-1}$ = 1/-1 = -1. Punto de corte (0, -1).

Si f(x) = 0, tenemos $e^x = 0$, y ya sabemos que nunca vale cero.

Un esbozo teniendo en cuenta todo lo anterior sería:



Ejercicio 2 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Sea f : R → R la función definidad por f(x) = x·cos(x/2).

a) [1'75 puntos] Calcula ∫ f(x) dx

b) [0'75 puntos] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

Solución

Sea f : R → R la función definidad por f(x) = x·cos(x/2).

a)
Calcula ∫ f(x) dx

$$\mathbf{F(x)} = \int f(x)dx = \int x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \left\{\begin{matrix} u=x & \Rightarrow du = dx \\ dv=\cos(x/2)dx & \Rightarrow v=\int\cos(x/2)dx=2\cdot\text{sen}(x/2)\end{matrix}\right\} = x\cdot 2\text{sen}(x/2) - \int 2\text{sen}(x/2)dx =$$

= 2x·sen(x/2) - 2(-2cos(x/2)) + K **= 2x·sen(x/2) + 4·cos(x/2) + K.**

b)
Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

De F(0) = 1 tenemos 1 = 2(1)·sen(0) + 4·cos(0) + K = 4 + K, de donde K = -3 y **la primitiva pedida es F(x) = 2x·sen(x/2) + 4·cos(x/2) – 3.**

Ejercicio 3 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema en función del parámetro m.
b) [0'75 puntos] Si es posible, resuelve el sistema para m = 1.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + 2y + 4z = m \end{cases}$

a)
Discute el sistema en función del parámetro m.

Matriz de los coeficientes A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, matriz ampliada A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$.

En A, det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1 & 4-m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1\cdot(\,(m-1)\cdot(4-m) - 1\cdot(1-m) =$

$= (m-1)\cdot(4-m) + 1\cdot(m-1) = (m-1)\cdot(4-m+1) = (m-1)\cdot(5-m).$

De det(A) = 0 tenemos (m-1)·(5-m) = 0, por tanto m = 1 y m = 5.

Si **m ≠ 1 y m ≠ 5**, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas, sistema compatible y determinado y tiene solución única**.

Si **m = 1**, tenemos A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, matriz ampliada A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos que tanto A como A* tiene dos filas iguales por tanto se puede suprimir una de ellas, además en A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 - 1 = 1 ≠ 0, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas, sistema compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas en nuestro caso)**.

Si **m = 5**, tenemos A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, matriz ampliada A* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ = 5 - 1 = 4 ≠ 0, tenemos **rango(A) = 2.**

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1\cdot(16 - 0) = 16 \neq 0$, tenemos **rango(A*) = 3**.

Por el Teorema de Rouche**, como rango(A) = 2 ≠ rango(A*), el sistema es incompatible y no tiene solución.**

b)
Si es posible, resuelve el sistema para m = 1.

Hemos visto en el apartado (a) que si m = 1, *rango(A) = rango(A*) = 2* < número de incógnitas, y *el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones*

Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (2ª y 3ª, que son las que he utilizado para obtener el menor de orden 2 de A distinto de cero) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x+\ y+\ z\ =\ 1 \\ x+2y+4z\ =\ 1\ (F_2-F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x+\ y+\ z\ =\ 1 \\ \quad y+3z\ =\ 0 \end{cases}$, tomando z = b ∈ R tenemos y = -3b y x = 1 - (-3b) - b = 1 + 2b,

la **solución del sistema para m = 1 es: (x,y,z) = (1 + 2b, -3b, b)** con b ∈ R.

Ejercicio 4 opción B, Segunda reserva de 2018 (modelo 3)

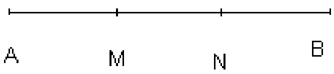
Considera los puntos A(2, -1, -2) y B(-1, -1, 2), y la recta r dada por $x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

a) [1 punto] Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.
b) [1,5 puntos] Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

Solución

Considera los puntos A(2, -1, -2) y B(-1, -1, 2), y la recta r dada por $x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

a)
Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.



A(2, -1, -2) y B(-1, -1, 2). Nos piden los puntos M y N que dividen al segmento en tres partes iguales.

Observamos la siguiente igualdad entre vectores **AB** = 3**AM**
AB = (-3, 0, 4)
AM = (x - 2, y + 1, z + 2)
De **AB** = 3**AM** obtenemos (-3, 0, 4) = (3x - 6, 3y + 3, 3z + 6), e igualando miembro a miembro se tiene -3 =3x - 6, de donde *x = 1*, 0 = 3y + 3, de donde *y = -1* y 4 = 3z + 6, de donde *z = -2/3*, es decir **el punto M es M(x,y,z) = = M(1, -1, -2/3).**
También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir **el punto N es N(x,y,z) =** = N((1 - 1)/2, (-1 - 1)/2, (2 - 2/3)/2) **= N(0, - 1, 2/3).**
Los puntos pedidos son M(1, -1, -2/3) y N(0, - 1, 2/3).
b)
Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

Tenemos A(2, -1, -2) y B(-1, -1, 2), y ponemos "r" es forma vectorial r ≡ (x,y,z) = (1, 1, 1) + δ(1, -1, 2) = = (1 + δ, 1 - δ, 1 + 2δ) con δ ∈ R. Un punto genérico de "r" es C(1 + δ, 1 - δ, 1 + 2δ).

Como nos dicen que ABC sea rectángulo en C, formamos los vectores **AC** y **BC**, que tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar (•) tiene que ser cero. De dicha ecuación obtendremos los valores de δ y los puntos pedidos.

AC = (1 + δ - 2, 1 - δ + 1, 1 + 2δ + 2) = (-1 + δ, 2 - δ, 3 + 2δ)
PQ = (1 + δ + 1, 1 - δ + 1, 1 + 2δ - 2) = (2 + δ, 2 - δ, -1 + 2δ)
AC•BC = 0 = (-1 + δ, 2 - δ, 3 + 2δ)•(2 + δ, 2 - δ, -1 + 2δ) = 0 =
= (-1 + δ)·(2 + δ) + (2 - δ)·(2 - δ) + (3 + 2δ)·(-1 + 2δ) = $6\delta^2$ + δ - 1 = 0

Tenemos $\delta=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12}$, por tanto las soluciones son δ = 4/12 = 1/3 y δ = -6/12 = - 1/2.

Para δ = 1/3 tenemos el punto de la recta C_1(1 + (1/3), 1 – (1/3), 1 + 2(1/3)) = **C_1(4/3, 2/3, 5/3).**

Para δ = -1/2 tenemos el punto de la recta C_2(1 + (-1/2), 1 – (-1/2), 1 + 2(-1/2)) = **C_2(1/2, 3/2, 0).**