

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2}$ para $x \neq -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Asíntotas Verticales: La recta $x = -1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{2}{0} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{2}{0} = +\infty$$

Asíntotas Horizontales: No tiene ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$

Asíntota Oblicua: La ecuación es $y = \frac{1}{2}x + 1$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{4x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 2} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x + 8 - 2x^2 - 2x}{2 \cdot (2x + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 8}{4x + 4} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \frac{2x^2 + 4x - 2}{(2x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

	$(-\infty, -1 - \sqrt{2})$	$(-1 - \sqrt{2}, -1)$	$(-1, -1 + \sqrt{2})$	$(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
Función	C	D	D	C

Creciente: $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$

Decreciente: $(-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2})$

Máximo: $(-1 - \sqrt{2}, -0'91)$

Mínimo: $(-1 + \sqrt{2}, 1'91)$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x - a) \cdot e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x = 0$.

b) Para $a = 1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f .

MATEMÁTICAS II. 2019. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = e^x + (x - a)e^x = e^x(x - a + 1)$$

Como hay un punto crítico en $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$, luego:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow e^0(0 - a + 1) = 0 \Rightarrow a = 1$$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = e^x \cdot x \Rightarrow f''(x) = e^x \cdot x + e^x = e^x \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo f''	—	+
Función	Cn	Cx

Luego, el punto de inflexión es: $\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$

Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2(x)}$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Resolvemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{-2x} - 2x}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + 2e^{-2x} - 2}{2\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) - 4e^{-2x}}{2 \cdot \cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{-1 - 4}{2} = \frac{-5}{2}$$

Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(\ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x=0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - ax + 2b &= 2b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} \cdot x - 1 \cdot \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calculamos la derivada por la izquierda y por la derecha en el punto 0

$$f'(0^-) = -a$$

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (x+1)}{2x \cdot (x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2x \cdot (x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2 \cdot (x+1)^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como es derivable en $x=0$, se cumple que: $f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow -a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Se considera la función $f : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\cos(x)}{2 + \cos(x)}$

a) Calcula sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) Halla sus máximos y mínimos relativos (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot (2 + \cos x) - (-\operatorname{sen} x) \cdot \cos x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-2\operatorname{sen} x}{(2 + \cos x)^2} \Rightarrow x = -\pi ; x = 0 ; x = \pi$$

	$(-2\pi, -\pi)$	$(-\pi, 0)$	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
Signo f'	-	+	-	+
Función	D	C	D	C

La función es creciente en: $(-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi)$ y decreciente en: $(-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi)$

b) Máximo en $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ y mínimo en $(-\pi, -1)$ y $(\pi, -1)$.

Se sabe que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de inflexión para $x=1$ y que la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en ese punto es $y = -6x + 6$. Calcula a , b y c .

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b ; f''(x) = 12x + 2a$$

- Punto de inflexión en $x=1 \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 12 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6$

- La pendiente de la recta tangente en $x=1$ es -6 , luego:

$$f'(1) = -6 \Rightarrow 6 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-6) \cdot 1 + b = -6 \Rightarrow b = 0$$

- Si $x=1 \Rightarrow y = -6 \cdot 1 + 6 = 0$. Luego, la función pasa por el punto $(1,0)$. Por lo tanto:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 + (-6) \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = 4$$

Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t) = t e^{-\frac{t}{2}}$ mg/ml, siendo t el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.

- a) Determina, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.
 b) Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señala si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que los extremos absolutos pueden estar en:

- **Los extremos del intervalo.**

Calculamos $C(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

$$\text{Calculamos } C(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} t \cdot e^{-\frac{t}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\frac{t}{2}}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{\frac{t}{2}}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

- **En los puntos donde se anula la derivada.** Calculamos crecimiento y decrecimiento de la función

$$C'(t) = 1 \cdot e^{-\frac{t}{2}} + t \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\right) = e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{t}{2} = 0 \Rightarrow t = 2$$

	(0,2)	(2,∞)
Signo $C'(t)$	+	-
Función	C	D

Luego, $t = 2$, tiene un máximo relativo que vale: $C(2) = 2 \cdot e^{-1} = \frac{2}{e} = 0,735$

- **En los puntos donde no es continua o derivable.** En este caso la función es continua y derivable.

Por lo tanto, el máximo absoluto está en $t = 2$ y vale 0,735

b) No hay riesgo para el paciente, ya que hemos visto que el máximo de concentración que se alcanza es de 0,735 mg/ml

Dada $f : (1, e) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ (\ln denota la función logaritmo neperiano), determina la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima.
MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

El valor $x = 0$ no está en el dominio, por lo tanto, sólo sirve el valor $x = 2$, es decir, el punto que nos piden es: $\left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 2$, es: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

Sustituyendo los valores de $f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$ y $f'(2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, tenemos:

$$y - \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \ln 2$$

Dada la función $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x)$, calcula sus máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la gráfica de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 0 \Rightarrow 1 - \text{tg } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{5\pi}{4}$$

	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Tiene un Máximo en $\left(\frac{\pi}{4}, +\sqrt{2}\right)$ y un mínimo en $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero:

$$f''(x) = -\text{sen } x - \cos x = 0 \Rightarrow -\frac{\text{sen } x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \Rightarrow -\text{tg } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{7\pi}{4}$$

	$\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$
Signo $f''(x)$	-	+	-
Función	Cn	Cx	Cn

La función es cóncava en el intervalo $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ y convexa en el intervalo $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ para $cx+1 \neq 0$

Determina a , b y c sabiendo que la recta $x = -1$ es una asíntota vertical a la gráfica de f y que $y = 2x + 4$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2019. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Las asíntotas verticales son los valores que anulan el denominador, luego:

$$c \cdot (-1) + 1 = 0 \Rightarrow c = 1.$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 4 = 6$. Luego la función pasa por el punto $(1, 6)$, es decir:

$$f(1) = 6 \Rightarrow \frac{a \cdot 1 + b}{1 + 1} = 6 \Rightarrow a + b = 12$$

Calculamos la derivada de $f(x) = \frac{ax+b}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{a \cdot (x+1) - 1 \cdot (ax+b)}{(x+1)^2}$$

Como la pendiente de la recta tangente es 2, entonces:

$$f'(1) = 2 \Rightarrow \frac{a \cdot (1+1) - 1 \cdot (a+1+b)}{(1+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{2a - a - b}{4} = 2 \Rightarrow a - b = 8$$

Resolvemos el sistema: $\left. \begin{array}{l} a + b = 12 \\ a - b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 10 ; b = 2$

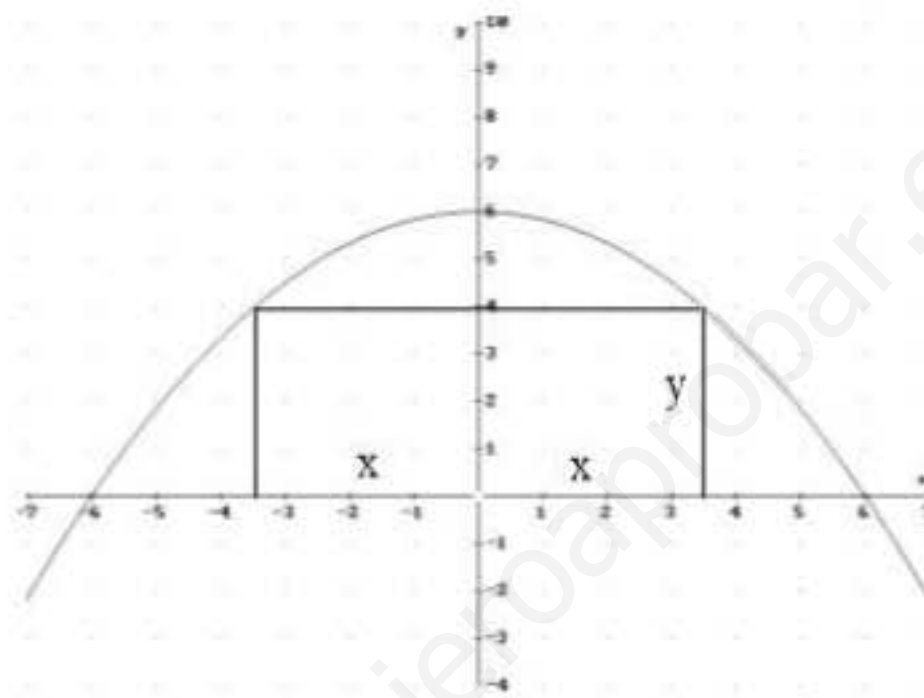
Luego, los valores son: $a = 10$; $b = 2$; $c = 1$

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un dibujo



a) La función que queremos que sea máxima es: $S_{\max} = 2x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $y = 6 - \frac{x^2}{6}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = 2x \cdot \left(6 - \frac{x^2}{6}\right) = 2x \frac{36 - x^2}{6} = 12x - \frac{x^3}{3}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

La solución válida es $+\sqrt{12}$ ya que es una longitud. Comprobamos que es máximo.

$$S'' = -2x \Rightarrow S''(2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $base = 2x = 4\sqrt{3} u$; $altura = y = 4 u$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) Halla k sabiendo que ambas se cortan en un punto.

b) Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s .

MATEMÁTICAS II. 2019. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2} \Rightarrow A = (2, k, 0); \vec{u} = (1, 2, 2)$$

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1} \Rightarrow B = (-1, 1, 3); \vec{v} = (-1, 1, 1)$$

Las rectas se cortan si el determinante de los vectores $\vec{AB} = (-3, 1-k, 3); \vec{u}$ y \vec{v} vale cero, luego:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1-k & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 + 3 - 2 + 2k + 6 - 1 + k + 6 = 0 \Rightarrow k = -2$$

b) El plano viene definido por el punto A y los vectores \vec{u} y \vec{v} , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow -y + z + 1 = 0$$