

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO. MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función $y = f(x)$ se obtienen a partir de la primera derivada de la función por la siguiente regla:

(a) f crece en un intervalo (a, b) si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b) .

(b) f decrece en un intervalo (a, b) si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) .

Los puntos extremos de intervalos en donde cambia el signo de la derivada son los máximos o mínimos, según la derivada cambie de positiva a negativa o de negativa a positiva, respectivamente. En resumen:

(a) Un punto x_0 del dominio de la función corresponde a un *máximo local o relativo* si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde f crece y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde f decrece.

(b) Un punto x_0 del dominio de la función corresponde a un *mínimo local o relativo* si existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ en donde f decrece y otro intervalo $(x_0, x_0 + \delta)$ en donde f crece.

Los máximos y mínimos locales se encuentran entre los llamados *puntos singulares o críticos*, es decir, puntos del dominio de la función en donde la derivada se anula o no existe.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = x(\sqrt{x} + 1).$$

Solución

Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \sqrt{x} + 1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

La derivada se anula cuando $3x + 2\sqrt{x} = 0$ y no existe cuando $2\sqrt{x} = 0$. Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$3x + 2\sqrt{x} = 0 \implies 3x = -2\sqrt{x} \implies 9x^2 = 4x \implies x = 0 \text{ ó } x = \frac{4}{9}.$$

Como el valor $x = 4/9$ no verifica la primera ecuación, el único valor que anula $f'(x)$ es $x = 0$. Por otra parte,

$$2\sqrt{x} = 0 \iff x = 0.$$

El único punto crítico es $x = 0$. Como el dominio de la función es el intervalo $[0, \infty)$ y $f'(x) \geq 0$ en todo el dominio, la función es siempre creciente. Por tanto, el punto $(0, 0)$ es el mínimo de la función.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

Solución

De nuevo calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}.$$

La derivada se anula cuando $x^3 - 8 = 0$ y no existe cuando $x^3 = 0$. Despejaremos x en ambas ecuaciones:

$$x^3 - 8 = 0 \iff x^3 = 8 \iff x = 2.$$

$$x^3 = 0 \iff x = 0.$$

Como el dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, el único punto crítico es $x = 2$. Estudiamos el crecimiento en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, \infty)$. Para ello, sustituimos la derivada de la función en cualquier punto interior a los intervalos. El signo de la derivada indicará si la función original crece o decrece. Así:

$$f'(-1) = -9/1 < 0 \implies \text{la función decrece en } (-\infty, 0).$$

$$f'(1) = -7/1 < 0 \implies \text{la función decrece en } (0, 2).$$

$$f'(3) = 19/27 > 0 \implies \text{la función crece en } (2, \infty).$$

Un método más cómodo por su claridad visual consiste en representar el dominio de la función sobre la recta real. A continuación, colocar en la misma recta los puntos críticos. De esta manera quedan ya delimitados los intervalos que se van a estudiar. Después de sustituir en la derivada de la función algún punto intermedio de cada intervalo, colocar el signo $+$ ó $-$ según si dicha derivada es positiva o negativa. Así quedan completamente determinados los intervalos y el comportamiento de la función en cada uno de ellos. En este ejemplo hubiera quedado así:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$ $+$	$-$ $-$	$+$ $+$

Encontrar los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x) = x^5 - 5x + 6.$$

Solución

Busquemos los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = 5x^4 - 5; f'(x) = 0 \iff 5x^4 = 5 \iff x^4 = 1 \iff x = \pm 1.$$

Como los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos siguientes:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	++	--	++

Como a la izquierda de $x = -1$ la función es creciente y a la derecha es decreciente, el punto corresponde a un máximo. Sustituyendo en la función se obtiene que el punto es $(-1, 10)$.

Análogamente, a la izquierda de $x = 1$ la función decrece y a la derecha crece. El punto corresponde a un mínimo y sus coordenadas son $(1, 2)$.

Solución

Los puntos críticos se obtienen de la siguiente forma:

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 = 2x^2 \iff x^2 = 1/2 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Además $f'(x)$ no existe cuando $\sqrt{1-x^2} = 0$, es decir, cuando $x = 1$ ó $x = -1$.

Como el dominio de la función es el intervalo $[-1, 1]$, estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que se ilustran en la tabla:

	$(-1, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, 1)$
$f'(x)$	--	++	--

Lo anterior quiere decir que el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ da lugar a un mínimo local y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a un máximo local. Los puntos correspondientes de la función son $(-1/\sqrt{2}, -1/2)$ y $(1/\sqrt{2}, 1/2)$.

¿La función $f(x) = (x-1)^3(x+2)^2$ alcanza un máximo o un mínimo en el punto $A(1,0)$?

Solución

Como

$$f'(x) = 3(x-1)^2(x+2)^2 + 2(x-1)^3(x+2) = (x-1)^2(x+2)(5x+4),$$

se obtiene que $f'(1) = 0$, con lo que el punto $(1, 0)$ es singular. Para ver si corresponde a un máximo o un mínimo, estudiamos el crecimiento de la función en un entorno de $x = 1$:

Si $x \in (1 - \delta, 1)$, $f'(x) > 0$ y f es creciente;

Si $x \in (1, 1 + \delta)$, $f'(x) > 0$ y f es también creciente.

Como no cambia el signo de la derivada, la función en el punto $(1, 0)$ no alcanza ni un máximo ni un mínimo relativo.

Dada la función $y = (x + 1)^2 e^{-x}$, hallar los máximos y mínimos locales.

Solución

Calculamos la primera derivada para determinar los puntos críticos:

$$f'(x) = 2(x+1) \cdot e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2 = e^{-x}(x+1)(1-x);$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x}(x+1)(1-x) = 0 \iff x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Los únicos posibles máximos y mínimos se alcanzan en los puntos $P_1(1, 4/e)$ y $P_2(-1, 0)$. Estudiamos a continuación el crecimiento de la función:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	--	++	--

De lo anterior se deduce que el punto $P_1(1, 4/e)$ es un máximo local y que el punto $P_2(-1, 0)$ es un mínimo local de la función.

Hallar, en caso de que existan, las abscisas de los máximos y mínimos de la función

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 14x + 10 \ln(x+3) + 90 \ln(x-5).$$

Solución

La primera derivada es

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + 5x + 14 + \frac{10}{x+3} + \frac{90}{x-5} \\ &= \frac{(x^2 + 5x + 14)(x+3)(x-5) + 10(x-5) + 90(x+3)}{(x+3)(x-5)}. \end{aligned}$$

Al anular la derivada, obtenemos:

$$\begin{aligned}y' = 0 &\iff (x^2 + 5x + 14)(x + 3)(x - 5) + 10(x - 5) + 90(x + 3) = 0 \\ &\iff x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 3x + 10 = 0.\end{aligned}$$

Si aplicamos la regla de Ruffini, resultan las raíces 1, -1, 2 y -5.

Teniendo en cuenta que el dominio de la función es el conjunto $D(f) = \{x \mid x > 5\}$, ninguno de los puntos anteriores pertenece al dominio por lo que la función carece de máximos y mínimos. Además, como $f'(x) > 0, \forall x \in D(f)$, f es siempre creciente.

Hallar un polinomio de tercer grado sabiendo que para $x = 3$ alcanza un mínimo local, para $x = 2$ alcanza un máximo local y para $x = 0$ y $x = 1$ toma los valores 1 y $29/6$, respectivamente.

Solución

Escribimos la forma general de un polinomio de grado 3 como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Para $x = 0$, $f(0) = 1 = d$.

Para $x = 1$, $29/6 = a + b + c + d$.

Como $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, tenemos:

Para $x = 3$, $f'(3) = 0 = 27a + 6b + c$.

Para $x = 2$, $f'(2) = 0 = 12a + 4b + c$.

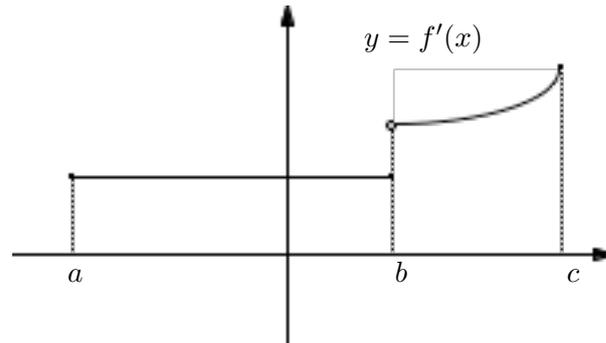
Resulta así el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 29/6, \\ 27a + 6b + c &= 0, \\ 12a + 4b + c &= 0, \\ d &= 1.\end{aligned}$$

Al resolver el sistema llegamos a la solución $a = 1/3$, $b = -5/2$, $c = 6$, $d = 1$, y la función solución es $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$.

Sea $y = f(x)$ una función cuya derivada tiene una gráfica como la que se muestra en la figura.

- ¿Qué se puede decir de f en $x = b$?
- ¿Tiene f algún máximo?
- ¿Dónde f decrece?



Solución

- De la gráfica se deduce que $f'(x)$ no es continua en $x = b$, porque los límites laterales son diferentes. Esto indica que la función f no es derivable en $x = b$.
- En todo el intervalo (a, b) la derivada de f es positiva. Por lo tanto, la función crece.

De la misma manera, en el intervalo (b, c) la función f también crece. El máximo se encuentra en c , que es el extremo derecho del intervalo donde está definida la función.
- De lo anterior se deduce que en ningún momento la función decrece, porque la derivada nunca es negativa.