Integrales inmediatas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(3x^2 + x - 2\sqrt{x}\right) dx$ b) $\int x\left(4 - 4x^2\right) dx$ c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx$

d) $\int \frac{5x}{3+3x^2} dx$ e) $\int \cos(4x+3) dx$ f) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right) dx$

g) $\int \left(3\cos\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{5}\right) dx$ h) $\int x\cos\left(3x^2\right) dx$ i) $\int \left(\cos(2x) - 3e^{2x-3}\right) dx$

j) $\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx$ k) $\int 5x\left(1-2x^2\right)^2 dx$ l) $\int (2-3x)^2 dx$

m) $\int \frac{x^2}{x^3+2} dx$ n) $\int \frac{3}{1+x^2} dx$ o) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}} dx$

p) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ q) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ r) $\int 2xe^{3x^2} dx$

s) $\int (1-x)^3 dx$ t) $\int x(1-x)^3 dx$ u) $\int \frac{(x-1)^3}{x} dx$

Solución:
En la mayoría de los casos hay que ajustar constantes y operar cuando sea necesario.

a) $\int \left(3x^2 + x - 2\sqrt{x}\right) dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2\int x^{1/2} dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + c$

b) $\int x\left(4-4x^2\right) dx = \int \left(4x - 4x^3\right) dx = 2x^2 - x^4 + c$

c) $\int \frac{e^{-2x}}{5} dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(-2)}\int (-2)e^{-2x} dx = -\frac{1}{10}e^{-2x} + c$

d) $\int \frac{5x}{3+3x^2} dx = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3+3x^2} dx = \frac{5}{6}\ln\left(3+3x^2\right) + c$

e) $\int \cos(4x+3) dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x+3) dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3) + c$

f) $\int \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos 5x\right) dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int 5\cos 5x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{15}\sin 5x + c$

g) $\int \left(3\cos\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{5}\right) dx = 6\int \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right) dx - \frac{1}{10}\int 2\sin 2x dx = 6\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{10}\cos 2x + c$

h) $\int x\cos\left(3x^2\right) dx = \frac{1}{6}\int 6x\cos\left(3x^2\right) dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right) + c$

i) Ajustando constantes en cada una de las funciones:

$$\int \left(\cos(2x) - 3e^{2x-3}\right) dx = \int \cos(2x) dx - \int \left(3e^{2x-3}\right) dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x) dx - \frac{3}{2}\int \left(2e^{2x-3}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{3}{2}e^{2x-3} + c$$

j) Ajustando constantes:

$$\int \cos x \cdot (\sin x)^2 dx = \frac{1}{3}\int 3(\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$$

k) $\int 5x\left(1-2x^2\right)^2 dx = -\frac{5}{4}\int \left(-4x\left(1-2x^2\right)^2\right) dx = -\frac{5}{4}\cdot\frac{\left(1-2x^2\right)^3}{3} + c = -\frac{5}{12}\left(1-2x^2\right)^3 + c$

l) Se opera en el integrando:

$$\int (2-3x)^2 dx = \int \left(4 - 12x + 9x^2\right) dx = 4x - 6x^2 + 3x^3 + c$$

m) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)+c$$

n) $\int \frac{3}{1+x^2}dx$. Es inmediata: $\int \frac{3}{1+x^2}dx = 3\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = 3\arctan x + c$.

o) Ajustando constantes:

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{4\cdot 2}{3}\int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{8}{3}\int \frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{8}{3}\sqrt{3-x^3}+c.$$

p) Ajustando constantes:

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -5\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = -5\sqrt{1-x^2}+c$$

q) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Es inmediata: $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 5\arcsin x + c$

r) Ajustando constantes:

$$\int 2xe^{3x^2}dx = \frac{2}{6}\int 6xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}e^{3x^2}+c$$

s) Desarrollando el integrando:

$$\int (1-x)^3 dx = \int \left(1-3x+3x^2-x^3\right)dx = x-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{1}{4}x^4+c$$

También podría hacerse directamente ajustando constantes:

$$\int (1-x)^3 dx = -\int (-1)(1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{4}+c$$

t) Hay que desarrollar el cubo, multiplicar e integrar: $\int x(1-x)^3 dx =$

$$= \int x\left(1-3x+3x^2-x^3\right)dx = \int \left(x-3x^2+3x^3-x^4\right)dx = \frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5+c$$

u) Hay que desarrollar el cubo, dividir e integrar:

$$\int \frac{(x-1)^3}{x}dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x}dx = \int \left(\frac{1}{x}-3+3x-x^2\right)dx = \ln x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1-2x)^2\,dx$ b) $\int \left(3x^2-2x\right)^2 dx$ c) $\int \frac{x}{1+3x^2}dx$

Solución:

a) $\int 5x(1-2x)^2\,dx = \int 5x\left(1-4x+4x^2\right)dx = \int \left(5x-20x^2+20x^3\right)dx = \frac{5}{2}x^2-\frac{20}{3}x^3+5x^4+c$

b) $\int \left(3x^2-2x\right)^2 dx = \int \left(9x^4-12x^3+4x^2\right)dx = \frac{9}{5}x^5-3x^4+\frac{4}{3}x^3+c$

c) $\int \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\ln\left(1+3x^2\right)+c$

3. Calcula:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2+3\right)dx$ c) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx$

Solución:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+c$

b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2+3\right)dx = \int\left(7x^{5/2}+3x^{1/2})\right)dx = \dfrac{7x^{7/2}}{7/2}+\dfrac{3x^{3/2}}{3/2}+c = 2x^{7/2}+2x^{3/2}+c$

c) $\int \dfrac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx = \int\left(\dfrac{5}{x}+\sqrt{3}x^{-3/2}\right)dx = 5\ln x+\dfrac{\sqrt{3}}{-1/2}x^{-1/2}+c = 5\ln x-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+c$.

4. Resuelve las integrales:

a) $\int(\sin 2x-3\cos 5x)\,dx$ b) $\int(\sin x+\cos x)^2\,dx$ c) $\int(\sin x-\cos x)^2\,dx$

<u>Solución</u>:

a) $\int(\sin 2x-3\cos 5x)\,dx = \int \sin 2x dx-\int 3\cos 5x dx = \dfrac{1}{2}\int 2\sin 2x dx-\dfrac{3}{5}\int 5\cos 5x dx =$

$= -\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{5}\sin 5x+c$

b) $\int(\sin x+\cos x)^2\,dx =$

$= \int\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)dx = \int(1+2\sin x\cos x)\,dx = x+\sin^2 x+c$

c) $\int(\sin x-\cos x)^2\,dx =$

$= \int\left(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x\right)dx = \int(1-2\sin x\cos x)\,dx = x+\cos^2 x+c$

También se puede escribir:

$\int(\sin x-\cos x)^2\,dx = x-\sin^2 x+c$, pues $x+\cos^2 x = x+\left(1-\sin^2 x\right)+c = x-\sin^2 x+(1+c)$

5. Halla:

a) $\int e^{4x}dx$ b) $\int e^{x/3}dx$ c) $\int xe^{1-x^2}dx$

d) $\int 4^x\,dx$ e) $\int 4{\cdot}3^x\,dx$ f) $\int 20\,x{\cdot}3^{x^2}\,dx$

<u>Solución</u>:

a) $\int e^{4x}dx = \dfrac{1}{4}\int 4e^{4x}dx = \dfrac{1}{4}e^{4x}+c$

b) $\int e^{x/3}dx = 3\int \dfrac{1}{3}e^{x/3}dx = 3e^{x/3}+c$

c) $\int xe^{1-x^2}dx = -\dfrac{1}{2}\int\left(-2xe^{1-x^2}\right)dx = -\dfrac{1}{2}e^{1-x^2}+c$

d) $\int 4^x\,dx = 4^x\cdot\dfrac{1}{\ln 4}+c$

e) $\int 4{\cdot}3^x\,dx = 4\int 3^x\,dx = 4\cdot\dfrac{3^x}{\ln 3}+c = \dfrac{4}{\ln 3}{\cdot}3^x+c$

f) $\int 20\,x{\cdot}3^{x^2}\,dx = 10\int 2x{\cdot}3^{x^2}\,dx = 10\cdot 3^{x^2}\cdot\dfrac{1}{\ln 3}+c = \dfrac{10}{\ln 3}{\cdot}3^{x^2}+c$

6. Calcula:

a) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)dx$ b) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2\,dx$ c) $\int\left(e^{2x}-\sin 2x\right)dx$

<u>Solución</u>:

a) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)dx = e^x-e^{-x}+c$

b) $\int \left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} dx=\int \left(e^{2x}+e^{-2x}+2e^{x}\cdot e^{-x}\right)dx=\int e^{2x}dx+\int e^{-2x}dx+\int 2dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+c$

c) $\int \left(e^{2x}-\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int 2\sin xdx=\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7. Resuelve, ajustando constantes, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{1}{2+x^{2}}dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^{2}}}$ c) $\int \frac{x-3}{x^{2}+9}\,dx$

Solución:

a) $\int \frac{1}{2+x^{2}}dx$ es parecida a $\int \frac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{1+f^{2}}dx=\arctan f+c$. Puede hacerse lo que sigue:

$$\frac{1}{2+x^{2}}=\frac{1}{2\left(1+\frac{x^{2}}{2}\right)}=\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}/\sqrt{2}}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2}}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{2+x^{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int \frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^{2}}}$ es parecida a $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{\sqrt{1-f^{2}}}dx=\arcsin f+c$. Se consigue así:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^{2}}} = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^{2}}{16}\right)}}dx = \int \frac{1}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^{2}}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^{2}}}dx= \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

c) $\int \frac{x-3}{x^{2}+9}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^{2}+9}-\frac{3}{x^{2}+9}\right)dx = \int \frac{x}{x^{2}+9}\,dx-\int \frac{3}{x^{2}+9}\,dx$.

La primera integral es casi inmediata: es un neperiano; en ella hay que ajustar constantes.
La segunda integral también es casi inmediata, aunque algo más difícil: es un arcotangente. También hay que ajustar constantes.

$$\int \frac{x}{x^{2}+9}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^{2}+9}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+9\right)+c_{1}.$$

$$\int \frac{3}{x^{2}+9}\,dx=\frac{1}{9}\int \frac{3}{\left((x/3)^{2}+1\right)}\,dx = \frac{3}{9}\int \frac{3\cdot(1/3)}{\left((x/3)^{2}+1\right)}\,dx = \int \frac{1/3}{(x/3)^{2}+1}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c_{2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-3}{x^{2}+9}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^{2}+9\right)-\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$