

Problemas resueltos de combinatoria

- 1) ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse seis personas en una fila de butacas?
- 2) ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de cuatro en cuatro?
- 3) ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se puede formar con los dígitos del 1 al 6?
- 4) En una reunión de 20 trabajadores se quiere elegir un comité formado por tres personas. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
- 5) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5?
- 6) En la nevera hay cinco salsas diferentes ¿De cuántas formas se pueden combinar en un plato, sabiendo que no quiero echar más de tres salsas?
- 7) Con las cifras 4, 5 y 6, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?
- 8) El sistema Braille se basa en combinaciones de punto en relieve o espacio sin punto, en grupos ordenados de seis posibilidades. ¿Cuántas ordenaciones posibles hay? ¿Son suficientes para las veintisiete letras, diez números y cuatro signos de puntuación básicos?
- 9) Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:
 - a) Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.
 - b) Una mujer determinada debe pertenecer al comité.
 - c) Dos hombres determinados no pueden estar juntos en el comité.
- 10) Con las letras de la palabra **EXAMEN**, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?
- 11) ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras pares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 40.000?
- 12) En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

Soluciones

1) *¿De cuántas formas distintas pueden sentarse seis personas en una fila de butacas?*

Como trabajamos con todos los elementos, y sí importa el orden en que los coloquemos, se trata de permutaciones. Por supuesto, sin repetición, porque no podemos duplicar una persona. Por lo tanto son **permutaciones**:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ formas distintas}$$

2) *¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de cuatro en cuatro?*

No trabajamos con todos los elementos ni se repite ninguno. Pero en este caso no nos importa el orden: mezclando el verde con el rojo obtenemos lo mismo que si mezclamos el rojo con el verde. Eso quiere decir que tenemos **combinaciones**.

$$C_{7,4} = 7!/(4! \cdot 3!) = 35 \text{ mezclas distintas}$$

3) *¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se puede formar con los dígitos del 1 al 6?*

No trabajamos con todos los elementos, ni se repiten elementos (el enunciado especifica que deben ser cifras diferentes). Y sí importa el orden. Conclusión: se trata de **variaciones**:

$$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \text{ números diferentes de cuatro cifras.}$$

4) *En una reunión de 20 trabajadores se quiere elegir un comité formado por tres personas. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?*

No trabajamos con todos los elementos, no puede haber repeticiones y tampoco importa el orden (sólo qué tres personas resultan escogidas). Se trata, por lo tanto, de **combinaciones**:

$$C_{20,3} = 20!/(3! \cdot 17!) = 1140 \text{ comités distintos}$$

5) *¿Cuántos números de tres cifras distintas se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5?*

No cogemos todos los elementos, no se repiten las cifras y sí importa el orden. En principio, se trata una vez más de **variaciones**. Pero ¿hay algo peculiar en este problema? Lo que ocurre es que no podemos formar un número cuya primera cifra sea cero, porque entonces no sería de tres cifras (nadie escribe el 45 como 045). Por lo tanto, tenemos que dividir el problema en dos partes:

a) ¿Cuántas posibilidades hay para la primera cifra? Esta es fácil: 5.

b) ¿Cuántas cifras tenemos disponibles para los dos dígitos que nos quedan, y de cuántas formas pueden ordenarse? Tenemos *cinco* cifras: el cero más los números del 1 al 5, *menos la cifra que ya hemos utilizado para la primera posición*. Ahora sí que calculamos unas variaciones normales:

$$V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

En total, 5 posibilidades para la primera posición por cada una de las 20 ordenaciones posibles para la segunda y tercera posición, nos dan 100 números diferentes.

6) *En la nevera hay cinco salsas diferentes ¿De cuántas formas se pueden combinar en un plato, sabiendo que no quiero echar más de tres salsas?*

No nos importa el orden (una vez en el plato, todo va mezclado) ni hay repeticiones, lo cual nos indica de inmediato que se trata de **combinaciones**:

$$C_{5,3} = 5!/(3! \cdot 2!) = 10 \text{ posibilidades distintas.}$$

7) *Con las cifras 4, 5 y 6, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?*

Nos importa el orden, y no sólo cogemos todos los elementos, sino que pueden repetirse (si no lo ves claro, piensa de qué manera puedes conseguir un número de cinco dígitos utilizando sólo tres cifras). Por lo tanto, son **variaciones con repetición**:

$$VR_{3,5} = 3^5 = 243 \text{ números de cinco cifras.}$$

La segunda parte nos pregunta cuántas de estas posibilidades corresponden a un número par. Para ello nos fijamos sólo en la última cifra, que puede valer 4, 5 o 6. Pero los únicos números que nos interesan son el 4 y el 6, o sea *dos números de cada tres van a ser pares*.

$$243 \cdot 2/3 = 162 \text{ números pares}$$

8) *El sistema Braille se basa en combinaciones de punto en relieve o espacio sin punto, en grupos ordenados de seis posibilidades. ¿Cuántas ordenaciones posibles hay? ¿Son suficientes para las veintisiete letras, diez números y cuatro signos de puntuación básicos?*

Como en el ejercicio anterior, tenemos dos elementos para formar ordenaciones de 6 elementos.

$$VR_{2,6} = 2^6 = 64$$

Como ves, hay suficientes posibilidades para 27 letras, 10 números y unos cuantos signos de puntuación (además de algunos indicadores especiales propios de este lenguaje). Se escogieron 6 posiciones porque 5 resultaban escasas (supondrían 32 posibilidades) y 7 demasiadas (128 posibilidades).

9) *Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:*

a) *Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.*

b) *Una mujer determinada debe pertenecer al comité.*

c) *Dos hombres determinados no pueden estar juntos en el comité.*

En todos los casos, no importa el orden de elección, por lo que tendremos que trabajar con **combinaciones**. El truco está en tratar cada subgrupo (hombres y mujeres) por separado, y luego multiplicar las posibilidades de uno por las del otro.

a) Hombres: $C_{5,2} = 10$

Mujeres: $C_{7,3} = 35$

Posibilidades totales: $10 \cdot 35 = 350$

b) Hombres: igual que el anterior. $C_{5,2} = 10$

Mujeres: como una de ellas está fija, tenemos que ver las posibles ordenaciones de las seis restantes para los dos puestos que quedan:

$$C_{6,2} = 15$$

$$\text{Posibilidades totales: } 10 \cdot 15 = 150$$

c) Mujeres: igual que el apartado a) $C_{7,3} = 35$

Hombres: para verlo más claro, llamemos a los hombres A, B, C, D y E, y supongamos que A y B son los que se llevan mal y no pueden estar juntos. Eso quiere decir que C, D y E los podemos tratar normalmente:

$$C_{3,1} = 3$$

Y el segundo hombre será o bien A o bien B, con lo cual tenemos dos posibilidades para cada una de las tres anteriores; es decir, 6.

$$\text{Posibilidades totales} = 35 \cdot 6 = 210$$

10) Con las letras de la palabra **EXAMEN**, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

¿Cuántas posibilidades hay para la primera posición? Tres (a efectos prácticos, debemos considerar las dos "E" como letras diferentes).

¿Y para las cinco posiciones restantes? En la segunda habrá cinco posibilidades diferentes (una letra ya la hemos gastado en la primera posición); en la tercera, cuatro posibles letras y así sucesivamente. En realidad, es como un problema de permutaciones, pero cuyo primer término no puede valer 6, porque sólo permitimos que sean vocales:

$$\text{Posibilidades} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360$$

También se podrán haber calculado todas las permutaciones ($6! = 720$) y luego razonar que sólo nos sirven 3 de cada 6:

$$720 \cdot 3/6 = 360 \text{ posibilidades}$$

11) ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras pares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 40.000?

La primera parte es fácil: son variaciones de cinco elementos tomados de cinco en cinco (o permutaciones, que es lo mismo):

$$P_5 = 5! = 120 \text{ posibilidades.}$$

¿Cuántas de estas posibilidades son mayores de 40.000? Aquellas cuyo primer número sea 5, 7 o 9. Es decir, nos valen tres de cada 5:

$$\text{Posibilidades mayores de 40000} = 120 \cdot 3/5 = 72$$

12) En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

Aquí utilizamos todos los elementos, e importa el orden (**permutaciones**). La novedad es que hay elementos repetidos un cierto número de veces. La fórmula en estos casos es:

$$P_9^{3,2,4} = 9!/(3! \cdot 2! \cdot 4!) = 1260 \text{ posibilidades.}$$