EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Calcule:

   a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - senx}$ b) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right) sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$

2. Sea la curva descrita por la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ para valores de $x > 2$. Calcula:

   a) La recta tangente a la gráfica en el punto P de la curva con abscisa $x = 3$

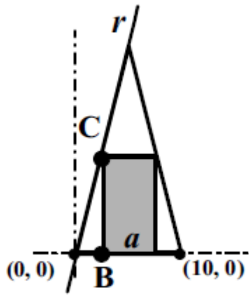
   b) El punto de corte entre esa recta tangente y la asíntota horizontal de la curva

3. El triángulo isósceles, descrito en la figura, mide 10 cm de base y 20 cm de altura.

   a) ¿Cual es la ecuación de la recta *r* señalada en la figura que contiene el lado del triángulo?

   b) Dado el rectángulo inscrito cuya base mide *a*, calcula las coordenadas de los puntos B y C en función de *a*.

   c) Halla el valor de *a* que hace máxima el área del rectángulo.



4. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 2x - 11 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ -\dfrac{8}{x} & \text{si } x \in [1, +\infty) \end{cases}$

5. Dada la función $y = x^4 e^{-x}$

   a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

   b) Halla, si existe, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

   c) Dibuja aproximadamente su gráfica

6. Al derramar pintura en una bandeja se va formando un charco cilíndrico de altura constantemente igual a 0,5 cm. Si derramamos la pintura a una tasa de 4 cm^3 / s, halle la tasa de crecimiento del radio del círculo cuando el radio mida 20 cm.

①

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{+\operatorname{sen} x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = \boxed{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\cos(x/2)}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

②

$f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \longrightarrow f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$

a) $x = 3 \longrightarrow y = \frac{2\cdot 3+1}{3-2} = 7$

$\longrightarrow y' = \frac{-5}{(3-2)^2} = -5$

Recta Tangente: $y - 7 = -5(x-3)$

$\boxed{y = 22 - 5x}$

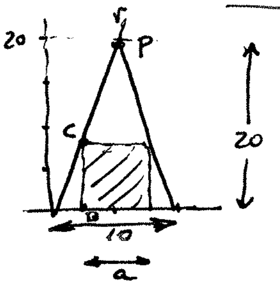
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1} = 2 \longrightarrow$ A. Horizontal $y = 2$

$\left.\begin{matrix} y = 22 - 5x \\ y = 2 \end{matrix}\right\}$ $2 = 22 - 5x$; $5x = 20$; $x = 4$ $\boxed{P(4,2)}$.

③

a) $\left.\begin{matrix} P(5,20) \\ O(0,0) \end{matrix}\right|$ $\vec{OP} = (5,20) \longrightarrow m = \frac{20}{5} = 4$

r: $\boxed{y = 4x}$



b) $\boxed{B\left(\frac{10-a}{2}, 0\right)}$

$x = \frac{10-a}{2} \longrightarrow y = 4\cdot\frac{10-a}{2} = 20 - 2a \longrightarrow \boxed{C\left(\frac{10-a}{2}, 20-2a\right)}$

c) Area $= a(20-2a) = 20a - 2a^2$ $a \in [0,10]$

$\frac{dA}{da} = 20 - 4a$

$\frac{dA}{da} = 0 \Rightarrow 20 - 4a = 0$; $a = 5$

	0	5	10
A'	+	−	
A	↗	↘	
		MAX	

Máximo área para $\boxed{a = 5}$

④ $f(x)=\begin{cases}5x^2-2x-11 & \text{Si } x<1\\ -\dfrac{8}{x} & \text{Si } x\geq 1\end{cases}$ dom f = ℝ

- $5x^2-2x-11$ es polinómico por lo que f es continua y derivable en $(-\infty,1)$
- $-\frac{8}{x}$ anula su denominador en $x=0$, pero no está incluido en el segundo tramo. Por lo tanto f es continua y derivable en $(1,+\infty)$ por tener expresión racional sin anularse el denominador.
- Únicamente puede estudiar en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 5\cdot 1^2-2\cdot 1-11 = -8\\ f(1) = -\dfrac{8}{1} = -8\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\dfrac{8}{1} = -8\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$f'(x)=\begin{cases}10x-2 & \text{Si } x<1\\ +\dfrac{8}{x^2} & \text{Si } x>1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 10\cdot 1-2 = 8\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \dfrac{8}{1^2} = 8\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=1 \text{ con } f'(1)=8.$$

Por lo tanto f es continua y derivable en ℝ.

⑤ $y = x^4e^{-x}$ dominio = ℝ

a) $y' = 4x^3e^{-x}+x^4\cdot e^{-x}\cdot(-1) = x^3e^{-x}(4-x) = x^3(4-x)e^{-x}$

$$y'=0 \Rightarrow x^3(4-x)e^{-x}=0 \begin{cases} \to x^3=0 \;;\; \boxed{x=0}\\ \to 4-x=0 \;;\; \boxed{x=4}\\ \to e^{-x}=0 \text{ Absurdo}\end{cases}$$

		0		4	
y'	−		+		−
y	↘		↗		↘
		MIN		MAX	

La función es creciente en $(0,4)$
La función es decreciente en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

b) La función tiene un mínimo local en $x=0$
La función tiene un máximo local en $x=4$

$$y' = (4x^3-x^4)e^{-x} \longrightarrow y'' = (12x^2-4x^3)e^{-x}+(4x^3-x^4)e^{-x}\cdot(-1) =$$
$$= x^2(12-4x-4x+x^2)e^{-x} = x^2(x^2-8x+12)e^{-x}$$

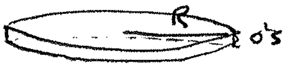
$$y''=0 \Rightarrow x^2(x^2-8x+12)e^{-x}=0 \begin{cases} \to x^2=0 \;:\; \boxed{x=0}\\ \to x^2-8x+12=0\\ \quad x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{2} = \dfrac{8\pm 4}{2} = \nearrow \boxed{6} \;\; \searrow \boxed{2}\\ \to e^{-x}=0 \text{ Absurdo.}\end{cases}$$

		0		2		6	
y''	+		+		−		+
y	cóncava		cónc.		conv.		cóncava
				INF		INF	

La función tiene puntos de inflexión en $x=2$, $x=6$

⑥

$V = \pi R^2 \cdot 0'5$



$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \cdot 0'5 = \pi R \frac{d}{dt}$$

$$4 = \pi R \cdot \frac{dR}{dt} \longrightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{4}{\pi R}$$

$$R = 20 \longrightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{\pi} \text{ cm } s^{-1}}$$