EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Calcule:

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$ b) $\lim_{x\to 0} \left(x^4+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$

2. Una curva tiene por ecuación: $xy^2 + x^2y = 2$

   a) Halle la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (1, 1)

   b) Halle la ecuación de la recta que es perpendicular a la curva en el punto (1, 1)

3. Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y=-x^2+4$ y la recta $y=1$. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y=1$.

4. Dada $a\in\Re$, se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{si } x<3 \\ x^2-1 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

   Determine los valores de *a* para los que la función es continua

5. Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

6. El volumen de un cuerpo viene dado por

   $$V=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$$

   En el instante en el que el radio mide 3 cm, el volumen es de $81\pi\ cm^3$, el radio está cambiando con un ritmo de 2 cm/min y la tasa de variación del volumen es de $204\pi\ cm^3/\min$. Calcule la tasa de cambio de la altura en ese mismo instante.

① a) $$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{+\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x\operatorname{sen}(x-1)}{2\ln x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1) + x\cos(x-1)}{\frac{2}{x}} = \frac{0+1\cdot 1}{2/1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{x\to 0} (x^4+e^x)^{1/x} = (0+1)^{1/0} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 0} \ln (x^4+e^x)^{1/x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(x^4+e^x)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^4+e^x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^4+e^x}\cdot(4x^3+e^x)}{1}} = e^1 = \boxed{e}$$

②

$$xy^2 + x^2y = 2$$

$$y^2 + x\cdot 2yy' + 2xy + x^2y' = 0 \quad ; \quad y' = \frac{-y^2-2xy}{2xy+x^2}$$

$$P(1,1) \longrightarrow y' = \frac{-1-2}{2+1} = -1$$

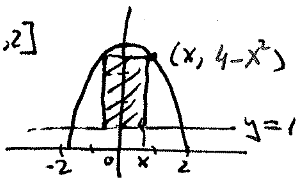
Recta Tangente : $y-1 = -1(x-1)$; $\boxed{y = 2-x}$

Recta Normal : $y-1 = \frac{-1}{-1}(x-1)$; $\boxed{y = x}$

③

Rectángulo: Base $= 2x$ | $x\in[0,2]$

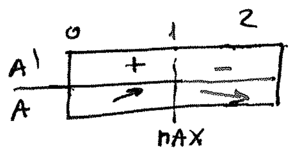
Altura $= 4-x^2-1 = 3-x^2$



$$\text{Area} = 2x(3-x^2) = 6x-2x^3$$

$$\frac{dA}{dx} = 6-6x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \longrightarrow 6-6x^2=0 \quad ; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$



Area Máxima para $x=1$

Base $= 2\cdot 1 = 2$ | En realidad es un cuadrado.

Altura $= 3-1^2 = 2$

④ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-3ax-6}{x-3} & \text{Si } x<3 \\ x^2-1 & \text{Si } x\geq 3 \end{cases}$

f está definida para todos los valores de x, pareciera que el primer trozo no está definido en x=3 - por anularse el denominador - pero x=3 pertenece en realidad al 2º trozo.

El primer trozo es continuo en $(-\infty,3)$ por tener expresión racional y no anularse el denominador. El segundo trozo es continuo en $(3,+\infty)$ por tener expresión polinómica.

Únicamente quedaría estudiar la continuidad en x=3:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3^2-1 = 9-1 = 8$$

$$f(3) = 3^2-1 = 9-1 = 8$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3} = \frac{18-9a-6}{0^-} = \frac{12-9a}{0^-}$$

- Si $12-9a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \infty \Rightarrow$ f no sería continua en x=3.

- Si $12-9a=0 \rightarrow a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, f podría ser continua:

$$a=4/3: \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-3\cdot\frac{4}{3}x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2-4x-6}{x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 3}\frac{4x-4}{1} =$$

$$= 4\cdot 3-4 = 8.$$

Al coincidir el punto en x=3 con los dos límites laterales, f será continua en $x=3 \Rightarrow \boxed{a=4/3}$

⑤ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

$\text{dom} f = \mathbb{R}-\{\pm 2\}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-4} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{2x} = 0^- \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x} = 0^+ \end{aligned}\right| \text{ Asíntota Horizontal } y=0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-}\frac{x}{x^2-4} = \frac{-2}{4^+-4} = \frac{-2}{+0} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} f(x) &= \lim_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2-4} = \frac{-2}{4^--4} = \frac{-2}{-0} = +\infty \end{aligned}\right| \text{ Asíntota Vertical } x=-2$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4^- - 4} = \frac{2}{-0} = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4^+ - 4} = \frac{2}{+0} = +\infty$

Asíntota vertical $x=2$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4) - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0$; $-x^2-4=0$; $x^2=-4$ Absurdo. No tiene extremos locales.

	-2		2	
f'	$-$	$-$		$-$
f	$\searrow$	$\searrow$		$\searrow$

f es decreciente en todo su dominio.

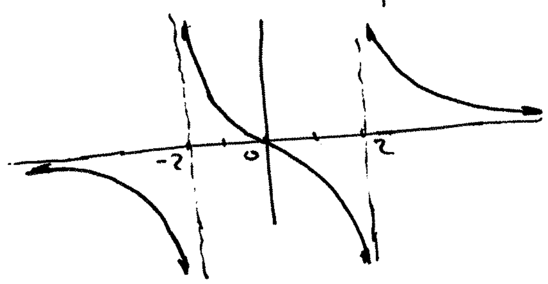
$$f''(x) = \frac{-2x\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}} - (-x^2-4)\cdot 2(\cancel{x^2-4})\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2x^3+24x=0$; $2x(x^2+24)=0$ → $x=0$; → $x^2+24=0$ Absurdo

		-2		0		2	
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f	Conv.		Cónc.		Conv.		Cóncava
				INF			

f es convexa en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$
f es cóncava en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$
f tiene un punto de inflexión en $x=0$

x	y
0	0



(6) $V=\frac{4}{3}\pi R^3+\pi R^2 H$

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cdot\cancel{3}R^2\frac{dR}{dt} + \pi\cdot 2R\frac{dR}{dt}\cdot H + \pi R^2\frac{dH}{dt}$

$\frac{dR}{dt}=2$, $\frac{dV}{dt}=204\pi$ | $204\cancel{\pi} = 4\cancel{\pi}R^2\cdot 2 + 2\cancel{\pi}RH\cdot 2 + \cancel{\pi}R^2\frac{dH}{dt}$ → $\frac{dH}{dt} = \frac{204-8R^2-4RH}{R^2}$

$R=3$, $V=81\pi$ | $81\cancel{\pi} = \frac{4}{3}\cancel{\pi}\cdot 3^3+\cancel{\pi}\cdot 3^2 H$ → $H = \frac{81-\frac{4}{3}\cdot 27}{9} = 5$ m

$R=3$, $H=5$ | → $\frac{dH}{dt} = \frac{204-8\cdot 3^2-4\cdot 3\cdot 5}{3^2} = \boxed{8 \text{ m/min}}$

El sólido podría ser este: