EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x}$

2. La recta tangente a la curva $y=3x-\tan x$ para $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sea paralela a la recta $y=x-2$ en uno de sus puntos. Escribe su ecuación.

3. Una lata cilíndrica tiene un volumen de 500 cm³. La altura de la lata es *h* cm y el radio de la base es *r* cm.

   a) Halle una expresión para la superficie total *A* de la lata en función de *r*.

   b) Dado que hay un valor mínimo de *A* para *r* > o, halle este valor de *r*.

4. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+8 & \text{Si } x\le -2 \\ 2x+4 & \text{Si} -2<x\le 0 \\ a\cos x & \text{Si } x>0 \end{cases}$

   a) Estudia su continuidad en toda la recta real en función de *a*.

   b) Estudia su derivabilidad en toda la recta real en función de *a*.

   c) Para *a* = 4, haz un dibujo aproximado de su gráfica.

5. Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $f(x)=1-\frac{1}{x+1}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

6. Sea $f(x)=x^3\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$

   a) Halla el valor de x para el que f(x) tiene un máximo

   b) Utiliza la función segunda derivada de f(x) para hallar el valor de x en el que f(x) tiene un punto de inflexión

①
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{3}\right)^{+\infty} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} 2x\ln\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)} =$$
$$= e^{\infty\cdot 0} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)}{1/2x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$
$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x-1)-\ln(3x+4)}{1/2x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x-1}-\frac{3}{3x+4}}{\frac{-2}{(2x)^2}}} =$$
$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{9x}+12-\cancel{9x}+3}{(3x-1)(3x+4)}}{-\frac{1}{2x^2}}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-30x^2}{(3x-1)(3x+4)}} =$$
$$= e^{-\frac{30}{9}} = \boxed{e^{-10/3}}$$

②
$$y = 3x - \operatorname{tg}x \longrightarrow y' = 3-(1+\operatorname{tg}^2x) = 2-\operatorname{tg}^2x$$

Recta Tangente paralela a $y=x-2 \Rightarrow y'=1 \longrightarrow 1 = 2-\operatorname{tg}^2x\ ;\ \operatorname{tg}^2x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}x = \pm 1 \longrightarrow x = \pi/4$ Única solución para $x \in (0, \pi/2)$

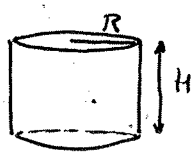
$x = \pi/4 \longrightarrow y = 3\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 1$

$x = \pi/4 \longrightarrow y' = 1$

$$y - \left(\frac{3\pi}{4}-1\right) = 1\cdot(x-\pi/4)$$
$$y = x - \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - 1$$
$$\boxed{y = x + \frac{\pi}{2} - 1}$$

③ Minimizar : $A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

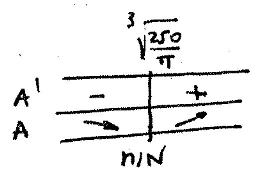
Siendo : $\pi R^2 H = 500$



$$\longrightarrow H = \frac{500}{\pi R^2} \longrightarrow A = 2\pi R^2 + 2\cancel{\pi}R\frac{500}{\cancel{\pi}R^2} = 2\pi R^2 + \frac{1000}{R}$$

$$\frac{dA}{dR} = 4\pi R - \frac{1000}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 1000}{R^2}$$

$$\frac{dA}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{4\pi R^3 - 1000}{R^2} = 0\ ;\quad 4\pi R^3 = 1000\ ;\quad R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$$



Superficie Mínima para $\boxed{R = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}\ \text{cm}}$

④
$$f(x) = \begin{cases} x^2+6x+8 & \text{si } x \le -2 \\ 2x+4 & \text{si } -2 < x \le 0 \\ a\cos x & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$$

a) Los tres trozos de f(x) tienen expresiones continuas, puede estudiar la continuidad en $x=-2$, $x=0$:

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = (-2)^2 + 6\cdot(-2)+8 = 0$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 6\cdot(-2)+8 = 0$$
$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = 2\cdot(-2)+4 = 0$$

$\longrightarrow$ f es continua en $x=-2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2\cdot 0+4 = 4$

$f(0) = 2\cdot 0+4 = 4$ $\quad\Big|\longrightarrow \boxed{a=4}$ para que f sea continua en $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a\cos 0 = a$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x<-2 \\ 2 & \text{si } -2<x<0 \\ -a\,\text{sen}\,x & \text{si } x>0 \end{cases}$ Queda estudiar la derivabilidad en $x=-2$, $x=0$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f'(x) = 2\cdot(-2)+6 = 2$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f'(x) = 2$ $\quad\Big|\Rightarrow f$ es derivable en $x=-2$ $\quad f'(-2)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ $\quad\Big|\Rightarrow f$ <u>no</u> es derivable en $x=0$ para ningún valor de 'a'

c) • $y = x^2+6x+8$

$y' = 2x+6 \longrightarrow$ Vértice en $x=-3$; $V(-3,-1)$

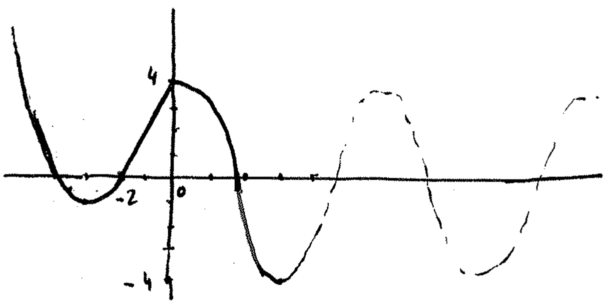
$x^2+6x+8=0 \longrightarrow x = \dfrac{-6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} -2 & (-2,0) \\ -4 & (-4,0) \end{cases}$

• $y = 2x+4$

x	y
-2	0
0	4

• $y = 4\cos x$

x	y
0	4
$\pi/2$	0
π	-4
$\vdots$	$\vdots$



⑤ $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

$\text{dom} f = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 - \dfrac{1}{-\infty} = 1^+$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 - \dfrac{1}{+\infty} = 1^-$ $\quad\Big|\longrightarrow$ Asíntota Horizontal $y=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1 - \dfrac{1}{-1^-+1} = 1 - \dfrac{1}{-0} = 1+\infty = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1 - \dfrac{1}{-1^++1} = 1 - \dfrac{1}{+0} = 1-\infty = -\infty$ $\quad\Big|\longrightarrow$ Asíntota Vertical $x=-1$

$f'(x) = -\dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{(x+1)^2}=0$; $1=0$ Absurdo

		-1	
f'	$+$		$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

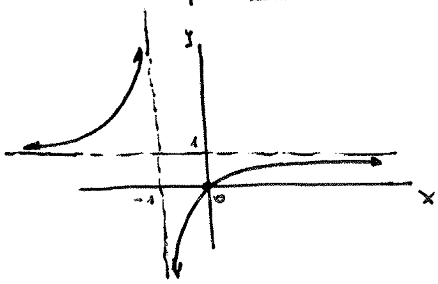
f es creciente en todo su dominio

<u>No</u> tiene extremos locales.

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

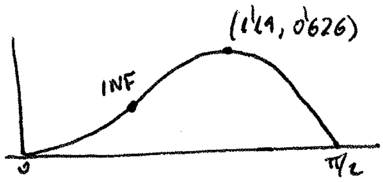
$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{-2}{(x+1)^3}=0 \ ; \ -2=0$$ Absurdo. <u>No</u> tiene Inflexiones

	$-\infty$ … -1	-1 … $+\infty$
f''	$+$	$-$
f	cóncava	convexa



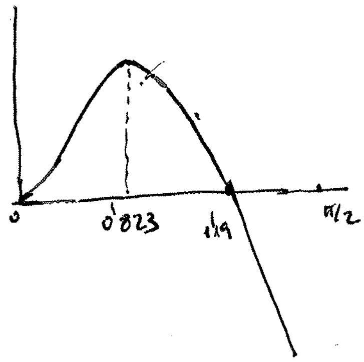
(6) $f(x) = x^3 \cos x \qquad (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

Representando en la calculadora gráfica:



$f'(x) = 3x^2\cos x + x^3\cdot(-\operatorname{sen} x) = x^2\cdot(3\cos x - x\operatorname{sen} x)$

Representando f' en la calculadora gráfica:



El máximo de f' nos indica la posición del punto de Inflexión de f: $x = 0'823$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Máximo local: } (1'19,\ 0'626) \\ \text{Punto de Inflexión: } (0'823,\ 0'379)\end{array}}$$