EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{ax} & \text{si } x>0\\ bx+c & \text{si } x\le 0\end{cases}$ con $a,b,c\in\Re$

   Determine los valores de a, b y c para que la función sea continua en su dominio, tenga un máximo relativo en $x=-1$ y la tangente en $x=-2$ sea paralela a la recta $y=2x$.

2. Dada la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\le 1\\ 4x-x^2 & \text{si } x>1\end{cases}$ calcule, si existe, la derivada en $x=1$ usando la definición de derivada.

3. De todos los cilindros inscritos en una esfera de radio 1 metro, halle el volumen del que lo tenga máximo.

4. Dada la función $y=2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$

   a) Indique su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

   b) Realice una representación gráfica aproximada de la misma.

5. Calcule: a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

6. Dibuje aproximadamente la curva $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$, $-4\le x\le 4$ y sobre ella rotule claramente las coordenadas de los puntos máximos / mínimos y de inflexión.

① $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{ax} & \text{si } x > 0 \\ bx+c & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

$\sqrt[3]{x}$ y $bx+c$ son expresiones continuas. Únicamente nos quedaría entonces garantizar la continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = c \\ f(0) = c \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{c=0} \text{ para que } f \text{ sea continua en } x=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{si } x>0 \\ b & \text{si } x<0 \end{cases}$$

f tiene un máximo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \rightarrow b=0$; $b=0$

f tiene en $x=1$ una recta tangente paralela a $y=2x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(1) = 2 \rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{1^2}} = 2$; $\sqrt[3]{a} = 6$; $a=216$

② $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x-x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

- $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(2(1+h)+1)-(2\cdot 1+1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2+2h+1-3}{h} =$

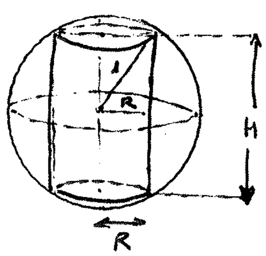
  $\displaystyle= \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = \boxed{2}$

- $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[4(1+h)-(1+h)^2]-(2\cdot 1+1)}{h} =$

  $\displaystyle= \lim_{h\to 0^+} \frac{4+4h-1-2h-h^2-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h-h^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} (2-h) = \boxed{2}$

Al coincidir ambos límites, la derivada existe: $\boxed{f'(1)=2}$

③ $R^2 + \left(\dfrac{H}{2}\right)^2 = 1$; $4R^2 + H^2 = 4$; $R^2 = \dfrac{4-H^2}{4}$



Maximizar: $V = \pi R^2 H = \pi \dfrac{4-H^2}{4} \cdot H =$

$= \dfrac{\pi}{4}(4H - H^3)$

$\dfrac{dV}{dH} = \dfrac{\pi}{4}(4-3H^2)$

$\dfrac{dV}{dH} = 0 \Rightarrow H = \sqrt{4/3}$

	0		$\sqrt{4/3}$		2
V'		+		−	
V		↗	MAX	↘	

Volumen Máximo $= \dfrac{\pi}{4}\left(4\sqrt{\dfrac{4}{3}} - \left(\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)^3\right) =$

$= \boxed{2'02 \text{ m}^3}$

④ $y = 2\sqrt{\frac{2}{x}-1}$

a) Por un lado $x \neq 0$, y además: $\frac{2}{x}-1 \geq 0$; $\frac{2-x}{x} \geq 0$

signo $\frac{2-x}{x}$

	0		2	
	−	+	−	

$\boxed{\text{dominio} = (0,2]}$

$$y' = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{x}-1}} \cdot \frac{-2}{x^2} = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$$

$$y'=0 \Rightarrow \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = 0 \;;\; -2=0 \quad \underline{\text{Absurdo}}$$

	0 — 2
y'	−
y	↘

La función es $\boxed{\text{decreciente}}$ en todo su dominio.

Para facilitar la 2^{a} derivada, simplificaremos la 1^{a}:

$$y' = \frac{-2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x}-1}} = \frac{-2}{\sqrt{x^4\left(\frac{2}{x}-1\right)}} = \frac{-2}{\sqrt{2x^3-x^4}}$$

$$y'' = \frac{+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x^3-x^4}}(6x^2-4x^3)}{\left(\sqrt{2x^3-x^4}\right)^2} = \frac{6x^2-4x^3}{(2x^3-x^4)\sqrt{2x^3-x^4}} = \frac{6-4x}{(2x-x^2)\sqrt{2x^3-x^4}}$$

$$y''=0 \Rightarrow \frac{6-4x}{(2x-x^2)\sqrt{2x^3-x^4}} = 0 \;;\; 6-4x=0 \;;\; x = 3/2$$

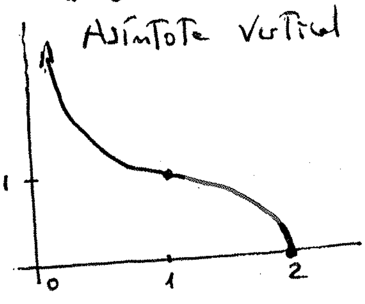
	0		3/2		2
y''		+		−	
y		Cóncava		Conv.	
			INF		

x	y
0^+	$+\infty$
$3/2$	$1'15$
2	0

$$\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{\frac{2}{x}-1} = 2\sqrt{+\infty} = +\infty$$

Asíntota vertical $x = 0^+$

b)



⑤

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty-\infty = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} = \frac{0}{0} =$$

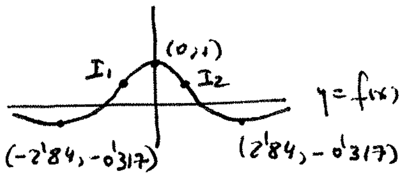
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = 1^{+\infty} = e^{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)} = e^{\infty\cdot 0} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1/x}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{x^2+2x}}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+2x}} = \boxed{e^2}$$

(6) Representando $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$ con la calculadora gráfica observamos:

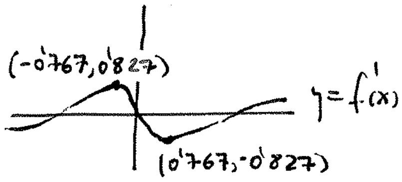


Tenemos: Máximo Local en (0,1)
Mínimos Locales en (-2'84, -0'317)
(2'84, -0'317)

Y se preven dos inflexiones, I_1 e I_2.

Representando la función derivada:

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{x^2+1} - \cos x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$



Los extremos locales de $f'(x)$ serán las inflexiones de $f(x)$.

$f(x)$ tiene inflexiones en (-0'767, 0'571)
(0'767, 0'571)