EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla la recta normal a la curva $y = e^{xy}$ en el punto de abscisa x = 0.

2. Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

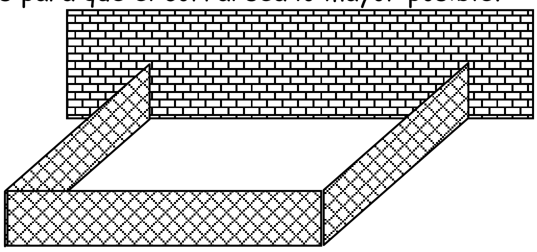
   a) Halle $f'(x)$ y $f''(x)$ simplificando las respuestas

   b) Halle el valor exacto de la abscisa del máximo relativo justificando que lo es mediante la 2ª derivada.

   c) Halle el valor exacto de la abscisa del punto de inflexión y justificando que lo es con el estudio de la curvatura de la función.

   d) Halle sus asíntotas.

3. Un pastor dispone de 1.000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicarle las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible?



4. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{m\left(e^x - 1\right)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$, donde $m \in \Re$.

   a) Calcule m para que f sea continua en $x = 0$.

   b) para el valor de m calculado estudie si f es derivable en $x = 0$.

5. Un depósito de forma cónica con tiene 8 metros de diámetro y una profundidad de 12 metros. El agua entra en el depósito por su vértice con un caudal de 10 m³ por minuto. Halla la tasa de variación de la profundidad del agua cuando alcanza 6 m de profundidad.

6. Sea $f(x) = x\cos x$, para $0 \le x \le \pi$. La curva de $f(x)$ tiene un máximo local en $x = a$ y un punto de inflexión en $x = b$.

   a) Utiliza la calculadora gráfica para esbozar la gráfica de $f(x)$ indicando las posiciones aproximadas de a y b.

   b) Halla a y b.

① $y = e^{xy}$

$y' = e^{xy} \cdot (y + x \cdot y')$; $y' - xe^{xy} y' = e^{xy} \cdot y$; $y' = \dfrac{e^{xy} \cdot y}{1 - xe^{xy}}$

$x=0 \to y = e^{0 \cdot y}$; $y = 1$ $\boxed{P(0,1)}$

$\to y' = \dfrac{e^{0 \cdot 1} \cdot 1}{1 - 0 \cdot e^{0 \cdot 1}} = 1$ $m = 1 \Rightarrow m' = -1$

Recta Normal

$y - 1 = -1(x - 0)$

$\boxed{y = 1 - x}$

② $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$

a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \dfrac{1 - 3\ln x}{x^4}$

$f''(x) = \dfrac{\frac{-3}{x} \cdot x^4 - (1 - 3\ln x) \cdot 4x^3}{x^8} = \dfrac{-3x^3 - 4x^3 + 12x^3 \ln x}{x^8} = \dfrac{12\ln x - 7}{x^5}$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{3}$; $x = e^{1/3}$

$f''(e^{1/3}) = \dfrac{12 \cdot 1/3 - 7}{(e^{1/3})^5} = \dfrac{-3}{e^{5/3}} < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Máximo local en } x = e^{1/3}}$

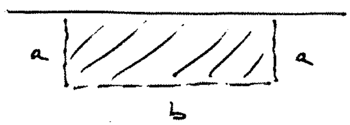
c) $f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 7/12$; $x = e^{7/12}$

	0	$e^{7/12}$	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	Convexo	Cóncava	

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Punto Inflexión en } x = e^{7/12}}$

③ Maximizar : $A = a \cdot b$

Siendo : $2a + b = 1000$



$b = 1000 - 2a \to A = a(1000 - 2a) = 1000a - 2a^2$; $a \in [0, 500]$

$\dfrac{dA}{da} = 1000 - 4a$

$\dfrac{dA}{da} = 0 \Rightarrow a = 250$

	0	250	500
A'	$+$	$-$	
A	$\nearrow$	$\searrow$	
		MAX	

Area Máxima $= 1000 \cdot 250 - 2 \cdot 250^2 = \boxed{125\,000 \text{ m}^2}$ con $\boxed{\begin{array}{l} b = 500 \text{ m} \\ a = 250 \text{ m} \end{array}}$

④ $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{m(e^x - 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{m \cdot (1-1)}{0} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{me^x}{1} = m$

$f(0) = 4$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = - - - - - - - - - - = m$

Para $\boxed{m = 4}$ f es continua en $x=0$

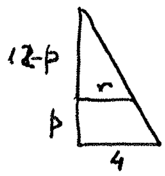
b) $$f'(x) = m \cdot \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)\cdot 1}{x^2} = m \cdot \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

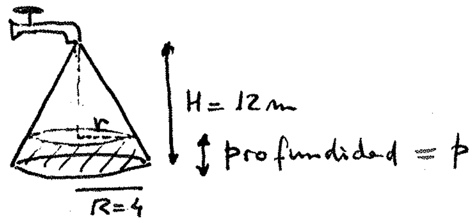
$$\lim_{x\to 0} f'(x) = m \frac{1\cdot(-1)+1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} m \frac{e^x(x-1)+e^x\cdot 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} m \frac{\cancel{x}e^x}{2\cancel{x}} = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

- Si $m=4$, f sería derivable en $x=0$ por ser continua y finito el $\lim\limits_{x\to 0} f'$, sería: $f'(0) = \frac{4}{2} = \boxed{2}$
- Si $m \neq 4$, f no sería derivable en $x=0$ por no ser continua, aunque el resultado del $\lim\limits_{x\to 0} f'$ fuera finito.

(5)





$$\frac{r}{12-p} = \frac{4}{12} \Rightarrow r = \frac{1}{3(12-p)}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 12}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (12-p)}{3} = 64\pi - \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{3(12-p)}\right)^2 \cdot (12-p) =$$

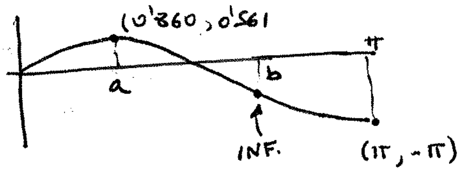
$$= 64\pi - \frac{\pi}{27(12-p)}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{27} \frac{+dp/dt}{(12-p)^2} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{27(12-p)^2}{\pi} \cdot \frac{dV}{dt} = -\frac{270}{\pi}(12-p)^2$$

$$p = 6 \rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{270}{\pi} \cdot 6^2 = \boxed{-3094 \text{ m/min}}$$

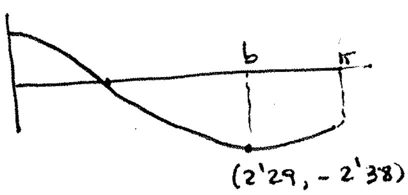
(6) $f(x) = x\cos x \qquad x \in [0,\pi]$

a)



← Visión de f con la calculadora
$\boxed{a = 0'860}$ buscando su máximo

b) $f'(x) = \cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$



← Visión de f' con la calculadora
$\boxed{b = 2'29}$ buscando su mínimo.