

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Escribe la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación: $xy = \arcsen\left(\frac{x}{2}\right)$ en el punto de abscisa $x = 1$

2. Haz un estudio de todas las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$

3. Halla los valores **exactos** de los puntos de inflexión de la curva $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$

4. Considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{1-x} & \text{Si } x \leq 0 \\ 1 - \text{sen}(2x) & \text{Si } x > 0 \end{cases}$ siendo a un n° real

a) Halla razonadamente el dominio de $f(x)$

b) Estudia para qué valores de ' a ' la función $f(x)$ resulta ser continua en $x = 0$

c) Estudia para qué valores de ' a ' la función $f(x)$ resulta ser derivable en $x = 0$

5. Una estalactita tiene la forma de un cono invertido de base circular cuya altura crece de manera constante 3mm cada siglo mientras que el radio de su base decrece a un ritmo constante de 0,5mm cada siglo. Calcule su tasa de variación de su volumen en el momento que mide 200mm de alto y 40mm de radio.

6. Se quiere construir una carretera entre dos pueblos **A** y **B** separados por un río de anchura k , las distancias son las que muestra el dibujo. Las condiciones del diseño son las siguientes:

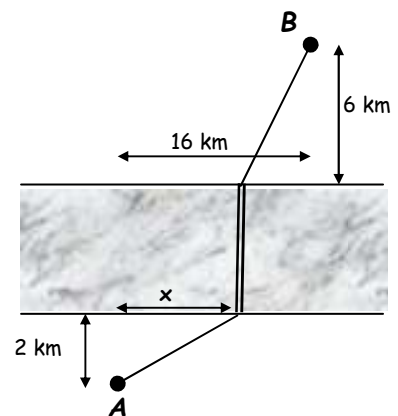
- La longitud final de la carretera debe ser mínima.
- El puente sobre el río debe estar situado en el espacio del río entre los pueblos **A** y **B** y ser perpendicular a sus orillas como muestra el gráfico.

a) Demuestra que la distancia entre **A** y **B** sigue la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 32x + 292} + k$$

b) Utiliza la calculadora gráfica para explicar a qué distancia, x en el dibujo, debemos construir el puente. Haz un esbozo de la gráfica. ¿Influye la constante k en el valor de x encontrado? Razona la respuesta.

c) ¿Cuál sería la peor solución, esto es, la que necesitase una carretera de mayor longitud?



①

$$xy = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$1 \cdot y + x \cdot y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} \quad ; \quad xy' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} - y \quad ; \quad xy' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - y \quad ;$$

$$y' = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} - y \right)$$

$$x=1 \rightarrow 1 \cdot y = \arcsin \frac{1}{2} \quad ; \quad y = \pi/6$$

$$2 \rightarrow y' = \frac{1}{1} \left(\frac{1}{\sqrt{4-1}} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{6}$$

$$\text{Recta Normal : } \left| y - \frac{\pi}{6} = - \frac{6}{2\sqrt{3} - \pi} (x - 1) \right|$$

②

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2x} = \frac{-1}{0} = \infty \Rightarrow \boxed{\text{Asintota vertical } x=0}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{x^2} = \frac{1 - 0}{+\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Asintota horizontal } y=0 \text{ cuando } x \rightarrow -\infty}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{x^2} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{2x} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{2} = -\infty \rightarrow \text{No tiene Asintota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{x^3} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{3x^2} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{6x} = \frac{-\infty}{+\infty} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{6} = -\infty \rightarrow \text{No tiene Asintota oblicua cuando } x \rightarrow +\infty$$

3) $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$

$\ln(x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$f'(x) = \frac{\ln(x^2) - x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\ln^2(x^2)} = \frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$

$f''(x) = \frac{\frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot \ln^2(x^2) - (\ln(x^2) - 2) \cdot 2 \ln(x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\ln^4(x^2)} = \frac{\frac{2\ln(x^2)}{x} - \frac{4\ln(x^2)}{x} + \frac{8}{x}}{\ln^3(x^2)} = \frac{8 - 2\ln(x^2)}{x \ln^3(x^2)}$

$f''(x) = 0 \rightarrow 8 - 2\ln(x^2) = 0 ; \ln(x^2) = 4 ; x^2 = e^4 ; x = \pm \sqrt{e^4} = \pm e^2$

	$-e^2$	-1	0	1	e^2
f''	+	-	+	-	+
f	Conv.	Conv.	Conc.	Conv.	Convexa
	INF			INF	

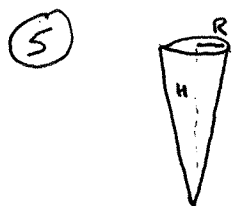
Puntos de Inflexión: $(e^2, \frac{e^2}{4}) \quad (-e^2, -\frac{e^2}{4})$

4) a) $\frac{e^{ax}}{1-x}$ no está definido en $x=1$, pero $1 \neq 0 \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}$
 $1 - \sin(2x)$ está definido en \mathbb{R}

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{e^0}{1-0} = 1$
 $f(0) = \frac{e^0}{1-0} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - \sin 0 = 1$
 $\Rightarrow f$ es continua en $x=0$ para $a \in \mathbb{R}$

c) $f'(x) = \begin{cases} \frac{ae^{ax}(1-x) - e^{ax} \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^{ax}(a-ax+1)}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -\ln(2x) \cdot 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{1 \cdot (a-0+1)}{1^2} = a+1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2 \ln 0 = -2$
 $a+1 = -2 \Rightarrow a = -3$
 Resulta derivable para $a = -3$



$\frac{dH}{dt} = 3 \text{ mm/siglo}$

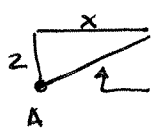
$\frac{dR}{dt} = -0.5 \text{ mm/siglo}$

$V = \frac{\pi R^2 H}{3} ; \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} (2R \frac{dR}{dt} H + R^2 \frac{dH}{dt}) = \frac{\pi}{3} (2RH \cdot (-0.5) + R^2 \cdot 3) = \frac{\pi}{3} (3R^2 - RH)$

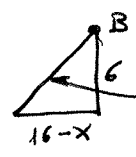
$$H = 200 \quad R = 40 \quad \left| \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} (3 \cdot 40^2 - 40 \cdot 200) = -3351 \text{ m}^3/\text{siglo}$$

6

a)



$$\sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}$$



$$\sqrt{(16-x)^2 + 6^2} = \sqrt{x^2 - 32x + 292}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 32x + 292} + k \quad \checkmark$$

b) Al estar únicamente sumando, la constante k no debe influir en la optimización de $f(x)$. Otra manera de entenderlo es que la constante k no aparece en la expresión de $f'(x)$.

En consecuencia introducimos la función $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 32x + 292}$ en la calculadora gráfica, observando:

Deberíamos construir el punto con $x = 4 \text{ km}$, siendo longitud mínima = 17.9 km

Comparando los puntos inicial y final del dominio, la peor solución sería

con $x = 16 \text{ km}$ siendo longitud máxima = 22.1 km

