CONTROL DE MECÁNICA

CUESTIONES

1.- Analiza la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas:

a) "El concepto de energía potencial como algo absoluto no tiene sentido"

b) "Toda fuerza que actúe sobre un cuerpo en rotación producirá variaciones en el giro"

c) "El período de oscilación de un péndulo puede venir dado por la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{g}}$ "

d) "Entre dos ondas de la misma amplitud y frecuencias respectivas de 100 y 400 Hz, la segunda posee el cuádruple de intensidad que la primera".

(2 punto)

2.- Un oscilador vertical oscila con una frecuencia de 12 Hz y velocidad máxima de 3π m/s. En el instante inicial se encuentra en y=+2 cm y ascendiendo. Determina la ecuación del MVAS.

(1 punto)

3.- Sobre un objeto de 4 kg actúa, exclusivamente, una fuerza de carácter conservativo. Suponiendo que en un desplazamiento desde un punto A a otro B la fuerza realice un trabajo de 100 J.

a) Determina las variaciones en las energías potencial y cinética y mecánica del objeto en dicho desplazamiento.

b) Si el objeto se movía con una velocidad de 7,2km/h en A, ¿a qué velocidad se moverá al llegar a B?

(1 punto)

PROBLEMAS

4.- La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es: y(x,t) = 0,05 sen π (25 t – 2 x) (S.I.)

a) Explique de qué tipo de onda se trata y en qué sentido se propaga e indique cuáles son su amplitud, frecuencia y longitud de onda.

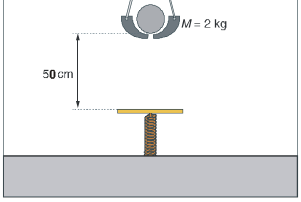
b) Calcule la velocidad de propagación de la onda y la velocidad del foco en el instante t = 1 s y explique el significado de cada una de ellas.

5.- Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza F, cuya dirección forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.

a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.

b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza F en un desplazamiento de 200 m del trineo. (g= 10 m s^{-2})

6.- Sobre un muelle, inicialmente en reposo, apoyado verticalmente sobre un plano horizontal, se deja caer desde una altura de 0,5 m una masa de 2 kg. Debido a ello, el muelle se comprime 10 cm y la bola queda adherida, comenzando el sistema a oscilar periódicamente.
Calcula el período de las oscilaciones del muelle. Considera g = 10 m · s^{-2}.



NOTA: *Recuerda que los problemas hay que explicarlos. Cuida el orden en la exposición, la limpieza y la ortografía.*

1.- Analiza la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, razonando las respuestas:

a) "El concepto de energía potencial como algo absoluto no tiene sentido"

Es verdadera. En un proceso en el que actúa una fuerza conservativa lo que importa es la variación de energía potencial y no qué valores tenga esta al principio o al final. Así por ejemplo, podemos fijar el origen de energías potenciales en el punto que nos interese, como así se hace en el estudio del campo gravitatorio, en el que $E_p(\infty)=0$.

Un ejemplo sencillo puede ser el siguiente. Imaginemos una maceta de 2 kg en un quinto piso, esto es a unos 15m de altura. ¿Qué energía tiene la maceta? La respuesta es bien distinta para un viandante que para una persona asomada al 3er piso (a unos 9 m de altura sobre el suelo). Está claro que la maceta golpearía al viandante (2kg·15m·10m/s² = 300 J) con más violencia que al vecino del 3º (2kg·6m·10m/s² = 120 J).

Así pues, la energía efectiva que la maceta tiene para el viandante será distinta que para el vecino del 3º, con lo que cada uno podría adjudicarle un valor absoluto diferente.

b) "Toda fuerza que actúe sobre un cuerpo en rotación producirá variaciones en el giro".

Según la expresión: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ *, lo que produce variación en el momento angular o cinético no son las fuerzas, sino los momentos de fuerza. Puesto que el momento de fuerza se define como el producto vectorial:* $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Por tanto, si $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$ *, y* $\vec{M} = 0$ *cuando: no actúa fuerza alguna, pero también ocurrirá cuando la fuerza que actúe lo haga directamente sobre el centro de giro (* $\vec{r} = 0$ *) o cuando la fuerza actúa en la línea que contenga al centro de rotación (* $\vec{r} \parallel \vec{F}$ *).*

c) "El período de oscilación de un péndulo puede venir dado por la ecuación $T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{g}}$ "

Podemos demostrar la falsedad de la expresión suministrada demostrando que dicha ecuación no es coherente dimensionalmente, es decir las dimensiones de ambos términos de la igualdad no coinciden.

$$[T] = T$$

$$\left[2\pi\cdot\sqrt{\frac{l^2}{g}}\right] = \frac{\left[\sqrt{l^2}\right]}{\sqrt{g}} = \frac{L}{\sqrt{L\cdot T^{-2}}} = L^{\frac{1}{2}}\cdot T$$

d) "Entre dos ondas de la misma amplitud y frecuencias respectivas de 100 y 400 Hz, la segunda posee el cuádruple de intensidad que la primera".

Dado que la intensidad es la energía que fluye por segundo y metro cuadrado, la intensidad es directamente proporcional a la energía de una onda que tiene la expresión:

$E = ½ \cdot K A^2 = ½ \cdot m\,\omega^2 \cdot A^2 = 2\,m\pi^2\,\vartheta^2\,A^2$

Dado que la energía e intensidad es directamente proporcional al cuadrado de la frecuencia, si la primera onda tiene una frecuencia ϑ_0 y la segunda una frecuencia $4\vartheta_0$, tenemos:

Con $\vartheta=\vartheta_0$ tenemos: $E_0 = 2\,m\pi^2\,\vartheta_0^2\,A^2$
con $4\,\vartheta_0$ tendremos: $E = 2\,m\pi^2\,(4\vartheta_0)^2\,A^2 = 16 \cdot (\,2\,m\pi^2\,\vartheta_0^2\,A^2\,) = 16\,E_0$

Por tanto, la segunda onda porta dieciséis veces más energía.

2.- Un oscilador vertical oscila con una frecuencia de 12 Hz y velocidad máxima de 3π m/s. En el instante inicial se encuentra en y=+2 cm y ascendiendo. Determina la ecuación del MVAS.

La ecuación general del MVAS es: $y(t) = A \cdot sen\,(\omega t + \varphi_0)$

Su derivada es la ecuación general de velocidad: $v(t) = A\omega \cdot cos\,(\omega t + \varphi_0)$
Por lo que la velocidad máxima de un oscilador es $A\omega$.
La frencuencia angular será: $\omega = 2\pi\vartheta = 24\,\pi$ *rad/s*

y como $v_{máx} = A\,\omega$ *, tenemos que:* $A = \dfrac{3\cancel{\pi}\,{}^{m}/\!_{\cancel{s}}}{24\cancel{\pi}\,{}^{rad}/\!_{\cancel{s}}} = \dfrac{1}{8}m$

Como para t=0 tenemos que y= +2 cm, sustituyendo en la ecuación de movimiento tenemos:

$y_0 = A \cdot sen\,(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 0{,}02\cancel{m} = \dfrac{1}{8}\cancel{m} \cdot sen\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = arcsen\ 0{,}16\ \text{rad} \approx \boxed{0{,}16\ \text{rad}}$

Por consiguiente, la ecuación del MVAS descrito por el muelle es:

$$y(t) = 0{,}125 \cdot sen(24\pi t + 0{,}16) \quad S.I$$

3.- Sobre un objeto de 4 kg actúa, exclusivamente, una fuerza de carácter conservativo. Suponiendo que en un desplazamiento desde un punto A a otro B la fuerza realice un trabajo de 100 J.

a) Determina las variaciones en las energías potencial y cinética y mecánica del objeto en dicho desplazamiento.

b) Si el objeto se movía con una velocidad de 7,2km/h en A, ¿a qué velocidad se moverá al llegar a B?

Se trata de una fuerza conservativa actuando en un tramo A→B.
$m = 4$ kg
$W_{A\to B} = 100$ J
$v_A = 7{,}2$ km/h $= 2$ m/s

a) Podemos aplicar el teorema de las fuerzas vivas y, además, al tratarse de una fuerza conservativa se cumplirá que el trabajo realizado será igual a la menos variación en la energía potencial, es decir:

$W_{A\to B} = \Delta E_c = 100$ J $\Rightarrow$ *por lo que la energía cinética aumentará en 100 J*
$W_{A\to B} = -\Delta E_p \Rightarrow \Delta E_p = -100$ J $\Rightarrow$ *la energía potencial disminuirá en 100 J*

y la energía mecánica se mantendrá constante al ser $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 100J - 100J = 0$

Esto es, la enegía cinética aumenta en la misma cantidad en la que disminuye la potencial. La energía mecánica se conserva constante, por tratarse de una fuerza conservativa.

b) Como: $\Delta E_c = E_{c,B} - E_{c,A} = W$

Despejando: $E_{c,B} = E_{c,A} + W$
$\frac{1}{2} m\, v_B^2 = \frac{1}{2} m\, v_A^2 + W$

$$v_B = \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2}\cdot 4kg\cdot(2\,\frac{m}{s})^2 + 100J)}{4kg}} = \boxed{7{,}35\,{}^{m}/\!_{s}}$$

PROBLEMAS:

4.- La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es: y(x,t) = 0,05 sen π (25 t – 2 x) (S.I.)

a) Explique de qué tipo de onda se trata y en qué sentido se propaga e indique cuáles son su amplitud, frecuencia y longitud de onda.

b) Calcule la velocidad de propagación de la onda y la velocidad del foco en el instante t = 1 s y explique el significado de cada una de ellas.

a) La ecuación es, modificando un poco: ***y(x,t) = 0,05 sen (25π t – 2 πx) (S.I.)***

Se trata de una onda transversal ya que relaciona el movimiento en una coordenada "y" para los puntos del medio indicados por la coordenada "x", perpendiculares entre si.

El signo negativo, dentro del paréntesis, indica que la onda se propaga de izquierda a derecha, por convenio.

La expresión general de un movimiento ondulatorio es: y(x,t) = A sen (ωt – kx)

Por comparación de la expresión dada y la general, tenemos que:

A = 0,05 m
ω= 25π rad/s
k= 2π m^{-1}

Frecuencia y longitud de onda podemos obtenerlas de sus relaciones con pulsación y número de ondas, como sigue:

$$\omega = 2\pi\upsilon \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{25\pi \, {}^{rad}\!/_{s}}{2\pi rad} = \underline{12,5Hz}|$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} m^{-1}} = \underline{1m}|$$

b) La velocidad con que se propaga la onda puede obtenerse de su longitud de onda y frecuencia:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\cdot\upsilon \quad \Rightarrow \quad v = 1m\cdot 12,5\ s^{-1} = \underline{12,5\, {}^{m}\!/_{s}}|$$

El punto x=0, que es el foco, se mueve, como cualquier otro punto, con MVAS. La ecuación de movimiento para dicho punto podemos escribirla sin más que sustituir x=0 en la ecuación del M.O:

$$y(0,t) = 0,05\cdot sen(25\pi t - \underbrace{2\pi 0}_{0}) \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0,05 \cdot sen\ 25\pi t$$

La velocidad con se mueve, vibra, dicho punto en cualquier instante, la obtenemos derivando la expresión anterior:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0,05 \cdot 25\pi \cdot \cos 25\pi t = 1,25\pi\cdot\cos 25\pi t$$

$$v(t = 1s) = 1,25\cdot\underbrace{\cos 25\pi}_{-1} = -1,25\pi \approx \underline{-3,9\, {}^{m}\!/_{s}}|$$

En ese instante el foco está descendiendo y pasando por la posición de equilibrio ya que la velocidad obtenida es máxima y negativa.

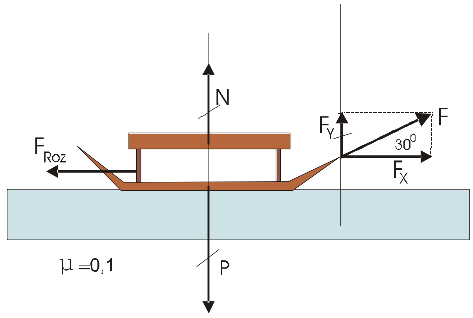
La velocidad de la onda es de 12,5 m/s y es constante. Es la velocidad con que avanza la energía pasando de punto a punto a lo largo de la cuerda. Sin embargo, la velocidad obtenida para el foco es instantánea, no constante, y es una velocidad de vibración. El punto vibra perpendicularmente al medio, por ser una onda transversal. Esa velocidad varía entre +3,9 y

-3,9 m/s, pasando por todos los valores incluidos el 0 (cuando se encuentra en los puntos de máxima elongación).

5.- Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza F, cuya dirección forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.

a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.

b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza F en un desplazamiento de 200 m del trineo. (g= 10 m s^{-2})



a) El diagrama es el representado.

Debe observarse que ha de cumplirse que:

$\vec{F}_y + \vec{N} = -\vec{P}$; por tanto: $\boldsymbol{N = P - F_y}$

Es decir, el peso del trineo es sustentado tanto por la superficie (fuerza normal) como por la componente y de la fuerza aplicada.

Para que se de un M.U, esto es v=cte, ha de cumplirse que la suma de todas las fuerzas actuantes se anulen. Por tanto, en la horizontal deberá cumplirse que:

$\vec{F}_x + \vec{F}_{roz} = 0 \Rightarrow F_x = F_{roz}$; desarrollando:

$F \cdot \cos 30º - N \cdot \mu = 0$
$0{,}87F - (mg - F \cdot \text{sen}30º) \cdot \mu = 0$
$0{,}87\ F - (1000N - 0{,}5F)\ 0{,}1 = 0$
$0{,}87F - 100\ N + 0{,}05F = 0$
$0{,}92F = 100\ N$
$\boldsymbol{F} = 100\ N/0{,}92 \simeq \boldsymbol{109\ N}$

b) Actúan dos fuerzas en la dirección en que se mueve el trineo, el rozamiento y la fuerza impulsiva (F). Según el teorema de las fuerzas vivas:

$$W_{total} = W_F + W_{roz} = \Delta E_c$$

Y en este caso se da M.U., es decir v=cte. Por consiguiente: $\Delta E_c = 0$. Eso significa que todo el trabajo realizado por la fuerza impulsiva, W_F, que comunica energía al trineo es disipado por el rozamiento, W_{roz}.

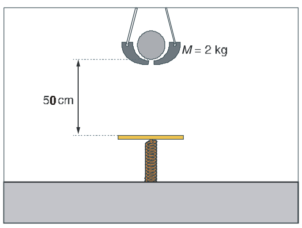
Ambos trabajos son iguales, pero con signo contrario.

Para calcular el trabajo aplicamos la expresión: $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha$
y tenemos:

$W_F = 109\ N \cdot \cos 30º \cdot 200\ m \simeq$ ***18 900 J***

Por tanto: W_{roz} = ***- 18 900 J***

6.- Sobre un muelle, inicialmente en reposo, apoyado verticalmente sobre un plano horizontal, se deja caer desde una altura de 0,5 m una masa de 2 kg. Debido a ello, el muelle se comprime 10 cm y la bola queda adherida, comenzando el sistema a oscilar periódicamente. Calcula el período de las oscilaciones del muelle. Considera g = 10 m · s^{-2}.



La energía potencial gravitatoria de la masa que cae se convierte en energía potencial elástica al comprimirse el muelle.

Mientras comprime el muelle, la masa sigue cediendo energía potencial gravitatoria al sistema, ya que sigue descendiendo. El balance energético del sistema es el siguiente:

$E_0 = E_F$, al ser las dos fuerzas actuantes, peso y fuerza elástica, conservativas. Por tanto: $E_{p,gravitatoria} = E_{p,elástica}$

$$m \cdot g \cdot (h + \Delta x) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2$$

De aquí podemos despejar la constante elástica del muelle:

$$k = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot (h + \Delta x)}{\Delta x^2} = \frac{2 \cdot 2kg \cdot 10\,{}^{\cancel{m}}/_{s^2} \cdot (0{,}5\cancel{m} + 0{,}1\cancel{m})}{(0{,}1\cancel{m})^2} = \frac{24\,{}^{kg}/_{s^2}}{0{,}01} = \underline{2\,400 \text{ N/m}}$$

Conocida la constante elástica y la masa del muelle, estamos en condiciones de averiguar el período del movimiento armónico:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{2\,400}} = 0{,}18 \text{ s}$$