Estudiar el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro:

a) $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -a \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$

$M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow rg(A) \geq 2$ (ya que existe un menor de orden 2 no nulo que no depende del parámetro)

- Si todos los menores de orden 3 son nulos → rg(A) = 2
- Si existe al menos un menor de orden 3 no nulo → rg(A) = 3
- Imponemos que |A| = 0

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -a \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = -a^2 - 2a + 1 - 2a^2 = -3a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a \neq -1; a \neq \frac{1}{3}$ → rg (A) = 3
- Si $a = -1; a = \frac{1}{3}$ → rg (A) = 2

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1+a \end{pmatrix}$

1ª forma: Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=F3-F2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & a & -1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1\leftrightarrow F2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & a & -1 & a-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F3=-a\cdot F2+F3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2a-1 & -2a-1 \end{pmatrix}$$

- Si $a = -\frac{1}{2}$ → rg (A) = 2
- Si $a \neq -\frac{1}{2}$ → rg (A) = 3

2º forma: Mediante menores

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → Tenemos un menor de orden 2 no nulo independiente del parámetro

Por tanto, $rg(B) \geq 2 \ \forall a \in \mathbb{R}$

Ampliamos el menor de orden 2 a uno de orden 3 añadiendo fila y columna, obteniendo los dos siguientes menores:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a + 2 - 1 = 2a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix} = 3a + 2 - 1 - a = a + 1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

- Si $a = -\frac{1}{2}$ → rg (A) = 2

- Si $a \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ rg (A) = 3

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

1ª forma: Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F1=F1+2F2]{F3=F3+5F2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-2 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & a+4 & -9 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & a+4 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & a-2 & 8 \end{pmatrix}$$

Si a = -4 $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg (C) = 2 ya que F2 y F3 son proporcionales

- Si $a = -4$ $\rightarrow$ rg (C) = 2
- Si $a \neq -4 \rightarrow$ rg (C) = 3

2º forma: Mediante menores

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ $\rightarrow$ Tenemos un menor de orden 2 no nulo $\rightarrow$ $rg(C) \geq 2 \ \ \forall a \in \mathbb{R}$

Orlando con la siguiente fila y las restantes columnas obtenemos dos menores de orden 3:

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{vmatrix} = 8(a+4) = 0 \rightarrow a = -4$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 48 + 12a = 0 \rightarrow a = -4$

- Si $a = -4$ $\rightarrow$ rg (C) = 2
- Si $a \neq -4 \rightarrow$ rg (C) = 3

a) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m+1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ $\rightarrow$ $rg(D) \geq 2 \ \ \forall m \in \mathbb{R}$ (existe un menor de orden 2 no nulo)

- Imponemos que |D| = 0

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ m+1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m+2 \\ m+1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (m+2)(3-m) \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $m \neq -2 \, ; m \neq 3$ $\rightarrow$ rg (D) = 3
- Si m = -2 ó m = 3 $\rightarrow$ rg (D) = 2

2ª forma: Mediante Gauss

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m+1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & m+2 \\ m-3 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & m-3 & 7 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

Si m = -2 $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg (D) = 2 $\qquad$ Si m = 3 $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ rg (D) = 2