Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Resuelve las siguientes integrales indefinidas usando el método que consideres más adecuado.

   a) $\int x \ln 2x \, dx$ b) $\int \frac{3x}{x^2+3x-10} dx$

2. Dadas las funciones $f(x)=x^2+2x$ y $g(x)=x+2$

   a) **[1 punto]** Representa gráficamente la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g.

   b) **[1 punto]** Calcula el área de la región anterior.

3. **[3 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, el primero por el método de Gauss y el segundo usando el método matricial.

   a) $\begin{cases} x+z=-y-3 \\ 3x-10=3z-2y \\ 2x+y-4z=13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+4z=-4 \\ y-2z=3 \\ -2x+4y-7z=6 \end{cases}$

4. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dada la siguiente ecuación matricial $A+BX=C$, se pide:

   a) **[1 punto]** Despeja la matriz X.

   b) **[1 punto]** Calcula la matriz X.

5. **[1 punto]** Calcula el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2x & 2 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Importante

En la obtención de la matriz inversa de una matriz, es obligatorio calcular explícitamente el determinante de la matriz dada, escribir su matriz adjunta y hacer el cálculo de la matriz inversa mediante la expresión de la fórmula correspondiente.

Soluciones

1. a) $\displaystyle\int x\ln 2x\,dx=\left[\begin{matrix} u=\ln 2x & du=\frac{2}{2x}dx=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2}\end{matrix}\right]=\frac{x^2}{2}\ln 2x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln 2x-\frac{1}{2}\int x\,dx=$

$$\frac{x^2}{2}\ln 2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2\ln 2x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$$

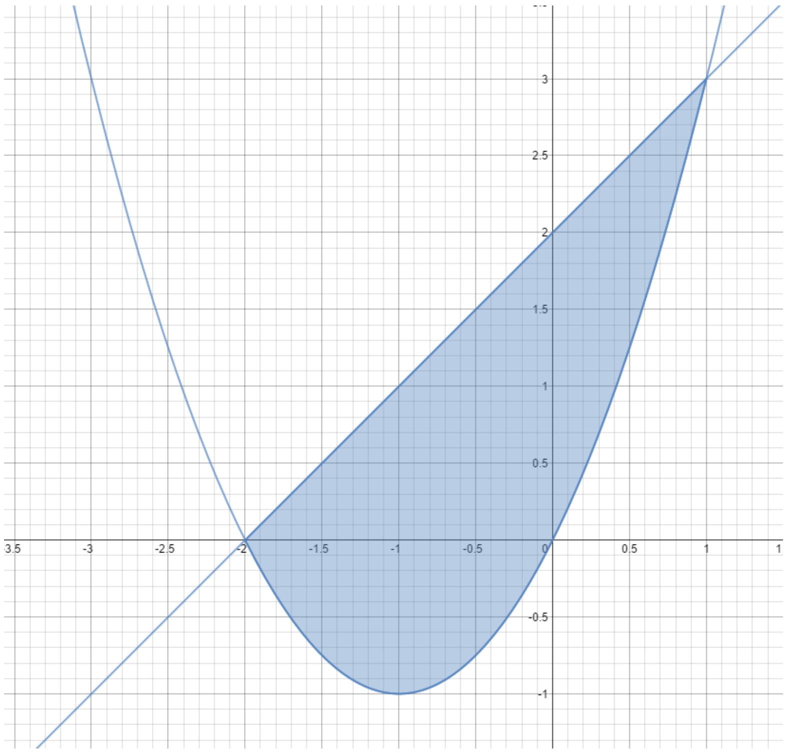
b) La factorización del polinomio $x^2+3x-10$ es $(x-2)(x+5)$. Descompongamos pues la fracción $\dfrac{3x}{x^2+3x-10}=\dfrac{3x}{(x-2)(x+5)}$ en fracciones simples.

$$\frac{3x}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}=\frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x-2)(x+5)}=\frac{(A+B)x+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)}$$

De aquí se deduce que $\begin{cases} A+B=3 \\ 5A-2B=0\end{cases}$. Resolviendo el sistema se tiene $A=\dfrac{6}{7}$, $B=\dfrac{15}{7}$. Por tanto:

$$\int\frac{3x}{x^2+3x-10}dx=\frac{6}{7}\int\frac{1}{x-2}dx+\frac{15}{7}\int\frac{1}{x+5}dx=\frac{6}{7}\ln(x-2)+\frac{15}{7}\ln(x+5)+C$$

2. La representación de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g es:



Calculemos la coordenada x o abscisa de los puntos de corte de ambas funciones:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+2x=x+2\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1\end{cases}$$

De las dos funciones, la que está por encima es g, con lo que el área de la región será:

$$A=\int_{-2}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left[(x+2)-\left(x^2+2x\right)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)-=\frac{7}{6}-\frac{-10}{3}=\frac{27}{6}\text{uds}^2=\frac{9}{2}\text{uds}^2=4{,}5\,\text{uds}^2$$

3. a) $\begin{cases} x+z=-y-3 \\ 3x-10=3z-2y \\ 2x+y-4z=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ 3x+2y-3z=10 \\ 2x+y-4z=13 \end{cases}$; usando el método de Gauss tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -3 & 10 \\ 2 & 1 & -4 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-3f_1 \\ f_3-3f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 19 \\ 0 & -1 & -6 & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3-f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ -y-6z=19 \end{cases}$$

Llamando $z=\lambda$, es fácil deducir que $y=-6\lambda-19$, $x=5\lambda+16$

b) $\begin{cases} x-2y+4z=-4 \\ y-2z=3 \\ -2x+4y-7z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$

$$|A|=(-7-8+0)-(-8+0-8)=-15+16=1;\ A^d=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}$$

4. $A+BX=C \Rightarrow BX=C-A \Rightarrow B^{-1}BX=B^{-1}(C-A) \Rightarrow IX=B^{-1}(C-A) \Rightarrow X=B^{-1}(C-A)$

$$|B|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0-2=-2;\ B^d=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ B^{-1}=\frac{1}{|B|}\left(B^d\right)^t=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix};$$

Además: $C-A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto $X=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Si en el determinante extraemos 2 de la segunda fila y a la 3ª columna le restamos el triple de la 1ª nos queda un determinante más sencillo. Luego desarrollamos por lo elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2x & 2 & 2 & 2 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1-3x & 1 \\ 1 & x & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1-3x & 1 \\ x & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(*)$$

Ahora se podría hacer Sarrus y finalizar, pero podemos hacer fila 2 menos fila 1 y fila 3 más fila 1:

$$(*)=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1-3x & 1 \\ x-1 & -3+3x & 0 \\ 2 & 3-3x & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x-1 & -3+3x \\ 2 & 3-3x \end{vmatrix}=2\left(3x-3x^2-3+3x+6-6x\right)=2\left(3-3x^2\right)=6-6x^2.$$