

1. [2 puntos] Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. [2 puntos] Halla el rango de la siguiente matriz en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & m^2 & 3m \end{pmatrix}$$

3. [3 puntos] Estudia el carácter del siguiente sistema usando el teorema de Rouché-Frobenius. Caso de que tenga solución, resuélvelo usando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} -2x - z = \\ x + y + 3z = \\ x - y - 2z = -2 \\ -3y - 2z = 1 \end{cases}$$

4. Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$

- a) [2 puntos] Discútelo para los distintos valores de m .
b) [1 punto] Resuélvelo para $m = 1$.

Soluciones

$$1. \begin{vmatrix} z/2 & z+7 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ x/2 & x-3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x/2 & x-3 & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ z/2 & z+7 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x/2 & x & 3 \\ y/2 & y & 3 \\ z/2 & z & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x/2 & -3 & 3 \\ y/2 & 0 & 3 \\ z/2 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = -9$$

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 & 2 \\ y & 0 & 1 & 2 \\ z & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & m^2 & 3m \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - 2f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & m^2 - 3 & 3m - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 - f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & m^2 - 1 & 3m + 3 \end{pmatrix}$$

Está claro que si $m = -1$, la última fila se anula, con lo que $r(A) = 2$. En caso contrario, si $m \neq -1$, se tiene que $r(A) = 3$

$$3. \text{ La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema } \begin{cases} -2x - z = \\ x + y + 3z = \\ x - y - 2z = -2 \\ -3y - 2z = 1 \end{cases} \text{ son, respectivamente:}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A|b = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es tres pues contiene un menor de orden tres distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (8+1) - (-2+6) = 9-4 = 5$$

El rango de la matriz $A|b$ también es tres pues el único menor de orden cuatro es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 + 2f_2 \\ f_2 - f_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (20-30-6) - (-15+15-16) = 0$$

Por tanto $r(A) = r(A|b) = 3 = n$ y el sistema es compatible determinado (solución única). Para resolverlo se elimina la última ecuación y, usando la regla de Cramer tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = -1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{5} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{5} = 1$$

4. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada del sistema
$$\begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 0 \end{cases}$$
 son:

$$A = \begin{pmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A|b = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = (m+2+m-1-m^2) - (1-m^2+m+m^2+2m) = -m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-1 \end{cases}$$

Por tanto, si $m \neq 0$ y $m \neq -1$, $r(A) = 3 = r(A|b) = n$ y el sistema es compatible determinado.

Si $m=0$, la matriz ampliada es $A|b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 pues contiene un menor de

orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$, por tanto $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|b)$ y el sistema

es incompatible.

Si $m=-1$, la matriz ampliada es $A|b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango también es 3 pues contiene un

menor de orden tres distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4$, por tanto otra vez,

en este caso, $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|b)$ y el sistema vuelve a ser incompatible.

Para $m=1$, el sistema es
$$\begin{cases} -z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$
. Además, se tiene que $|A| = -2$, con lo que, usando la regla de

Cramer, las soluciones son las siguientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$