

Ecuaciones con fracciones y radicales

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \frac{1-x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$b) \frac{x+1}{x-2} + \frac{2x+2}{x+1} = \frac{3x+1}{x-1}$$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales:

$$a) \frac{x}{\sqrt{x+9}} = \frac{\sqrt{x+9}}{x+1}$$

$$b) \sqrt{2x-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

$$c) \sqrt{x+5} + 1 = x$$

3 Calcula la solución de estas ecuaciones racionales:

$$a) 1 = \frac{2}{x-3}$$

$$b) \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5}{x^2-1}$$

$$c) \frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+2}$$

Solucionario

1 a) $\frac{1-x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

Se multiplican los dos miembros por el máximo común divisor y se simplifica:

$$\frac{(1-x) \cdot (x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Por tanto, la solución es } x = \frac{1}{3}$$

b) $\frac{x+1}{x-2} + \frac{2x+2}{x+1} = \frac{3x+1}{x-1}$

Se multiplican los dos miembros por el máximo común divisor y se simplifica:

$$\frac{(x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x-2} + \frac{(2x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x+1} = \frac{(3x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot (x^2+1) + (2x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-1) = \frac{(3x+1) \cdot (x-2) \cdot (x^2-1)}{x-1} \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -1$.

2 a) $\frac{x}{\sqrt{x+9}} = \frac{\sqrt{x+9}}{x+1} \Leftrightarrow x(x+1) = (x+9) \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$

Por tanto, las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

b) $\sqrt{2x-1} = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow (2x-1) \cdot (x-1) = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$

La solución es solo $x = 5$, porque $x = 0$ no lo es, ya que $\sqrt{-1}$ no existe.

c) $\sqrt{x+5} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = x-1 \Leftrightarrow x+5 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 0$

La solución es solo $x = 3$, porque $x = -1$ no lo es, ya que $\sqrt{-5} \neq -1$.

3 a) $1 = \frac{2}{x-3} \Rightarrow x-3 = 2 \Rightarrow x = 5$

b) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{5}{x^2-1} \Rightarrow x+1+x^2-x=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm 2$

c) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+2} \Rightarrow x-2x-4=3x-6 \Rightarrow -4x=-2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$