PERPENDICULARIDAD

- 1) Halla la ecuación de la recta r contenida en el plano π , que pasa por el punto $A(1,0,-1)$ y que es perpendicular a la recta s , en cada uno de los casos:

a) $\pi: 2x - 3y + z - 3 = 0$, $s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$

b) $\pi: 3x + y - z + 3 = 0$, $s: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$

- 2) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,1,-1)$, $B(-1,2,1)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x + y + z + 2 = 0$

- 3) Halla el plano π perpendicular al plano π' : $x - 2y - 3z + 1 = 0$ y que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x - y + 3z = \\ x - z + 2 = \end{cases}$

- 4) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,0)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$

- 5) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,0)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$

SOLUCIONES

1) a) La recta r se puede calcular como intersección de dos planos, π y π' (plano perpendicular a la recta s y que contiene al punto P)

$$\pi: \vec{n}_{\pi} = \vec{d}_s = (-1, 1, 2), A(1, 0, -1) \rightarrow \pi': -1(x-1) + 1(y-0) + 2(z+1) = 0 \rightarrow$$

$$\pi': x - y - 2z - 3 = 0, \mathbf{r} \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0 \\ x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

b) Ejercicio análogo al apartado a). Para hallar la dirección de la recta s hallamos el producto vectorial de los vectores perpendiculares a los planos que determinan la recta s.

$$s: \begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \vec{n}_1 = (1, 1, -3) \\ \vec{n}_2 = (2, -1, 1) \end{matrix} \rightarrow \vec{d}_s = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2, -7, -3) \rightarrow$$

$$\pi': -2(x-1) + (-7)(y-0) + (-3)(z+1) = 0 \rightarrow \pi': 2x + 7y + 3z + 1 = 0,$$

$$\mathbf{r} \equiv \begin{cases} 3x + y - z + 3 = 0 \\ 2x + 7y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

2) Del plano buscado conocemos dos puntos A(2,1,-1) y B(-1,2,1), un vector director $\vec{AB} = (-3, 1, 2)$ y el otro vector director $\vec{u} = \vec{n}_{\pi'} = (1, 1, 1)$, luego su ecuación se halla haciendo el

$$\text{determinante: } \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: x - 5y + 4z + 7 = 0$$

3) Del plano π conocemos un punto (cualquiera de la recta r), un vector director (el vector director de la recta s) y otro vector director (el vector perpendicular al plano π'). Halla, primero, las ecuaciones paramétricas de r.

$$r: \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3z \\ x = -2 + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 5t \\ z = t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} P_r = (-2, -4, 0) \\ \vec{d}_r = (1, 5, 1) \end{matrix}; \quad \vec{n}_{\pi'} = (1, -2, -3)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y+4 & z \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi = 13x - 4y + 7z + 10 = 0$$

4) Del plano pedido conocemos un punto A(1,2,0) y necesitamos su vector perpendicular $\vec{n}_{\pi} = \vec{d}_r$. Para hallar la dirección de la recta r hallamos el producto vectorial de los vectores perpendiculares a los planos que determinan la recta r.

$$\begin{matrix} \vec{n}_1 = (1, -2, 3) \\ \vec{n}_2 = (2, 1, -1) \end{matrix} \rightarrow \vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, 7, 5)$$

$$\pi': -1(x-1) + 7(y-2) + 5(z-0) = 0; \mathbf{x - 7y - 5z + 13 = 0}$$

5) Del plano pedido conocemos un punto A(1,2,0) y su vector perpendicular $\vec{n}_{\pi} = \vec{d}_r = (-1, 2, 0)$
 $\rightarrow \pi: -1(x-1) + 2(y-2) = 0; \mathbf{x - 2y + 3 = 0}$

PERPENDICULAR COMÚN Y DISTANCIAS

1) Halla la recta perpendicular común a las rectas $r: \begin{cases} x=0 \\ y-1=\frac{z-2}{-3} \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x-1=\frac{z-1}{-1} \\ y=0 \end{cases}$

2) Distancia entre las rectas r y s del ejercicio anterior.

3) Distancia entre las rectas $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ y $s: x+1 = \frac{2(y-3)}{3} = \frac{z-1}{2}$

SOLUCIONES

1) Los pasos a seguir son:

a. Posición relativa de r y s

b. vector $\vec{n}$ perpendicular a r y s

c. Plano π que contiene a la recta r y al vector $\vec{n}$

d. Plano π' que contiene a la recta s y al vector $\vec{n}$

e. La recta perpendicular común a r y s es la intersección de los plano anteriores.

$$a) r: \begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \rightarrow \vec{d}_r = (0,1,-3); \quad s: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \rightarrow \vec{d}_s = (1,0,-1)$$

$$\begin{cases} 0=1+t' \\ 1+t=0 \\ 2-3t=1-t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t'=-1 \\ t=-1 \\ \mathbf{5=2} \end{cases} \rightarrow \text{Sistema incompatible, las rectas se cruzan (vectores directores no proporcionales).}$$

$$b) \vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (0,1,-3) \times (1,0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1,-3,-1)$$

c) Del plano π conocemos un punto $P_r(0,1,2)$ y los vectores $\vec{d}_r$ y $\vec{n}$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 10x - 3y - z + 5 = 0$$

d) Del plano π' conocemos un punto $P_s(1,0,1)$ y los vectores $\vec{d}_s$ y $\vec{n}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3x - 2y + 3z - 6 = 0$$

$$e) \text{ La recta perpendicular común es: } \begin{cases} 10x - 3y - z + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

2) **Primer método:**

Como r y s se cruzan hay que hallar:

a. Un plano π que contenga a r y sea paralelo a s

b. Distancia de r a s es igual a la distancia de un punto de s al plano π .

$$a) r: \begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=2-3t \end{cases} \rightarrow \vec{d}_r = (0,1,-3); \quad s: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \rightarrow \vec{d}_s = (1,0,-1), \quad P_s = (1,0,1)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv x + 3y + z - 5 = 0$$

$$b) d(P_s, \pi) = \frac{|1+0+1-5|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \mathbf{u}$$

Segundo método: A partir de la recta r' perpendicular común a r y s tenemos que hallar:

c. Punto A de intersección de r y r' .

d. Punto B de intersección de s y r' .

e. $d(r,s) = d(A,B)$

a) Resolver el sistema entre r y r' .

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 3y - z + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 0 = 0 \\ t = -2/11 \end{matrix} \rightarrow A(0, \frac{9}{11}, \frac{28}{11})$$

b) Resolver el sistema entre s y r' .

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 3y - z + 5 = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t = -14/11 \\ 0 = 0 \end{matrix} \rightarrow B(\frac{-3}{11}, 0, \frac{25}{11})$$

c) $d(r,s) = d(A,B) = \sqrt{\left(0 + \frac{3}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11} - 0\right)^2 + \left(\frac{28}{11} - \frac{25}{11}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{11} u$

3) Primero tenemos que estudiar la posición relativa de r y s , tendremos que resolver el sistema.

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \quad y \quad s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + \frac{3}{2}t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 + 2t = -1 + t' \\ 3 + 3t = 3 + \frac{3}{2}t' \\ 4t = 1 + 2t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - t' = 0 \\ 2t - t' = 0 \\ 4t - 2t' = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} t' = 2t \\ 0 = 1 \end{matrix} \text{ Sistema incompatible, } \vec{d}_r = (2,3,4), \vec{d}_s = (1, \frac{3}{2}, 2), \text{ proporcionales } \rightarrow r // s$$

Por lo tanto la distancia de r a s se halla calculando la distancia de un punto de r a la recta s

Para calcular esta distancia hay que hacer:

- Plano, π , perpendicular a r (y también a s) que pase por un punto de r (P_r).
- Intersección del plano con la recta s , B
- $d(r,s) = d(P_r, B)$

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \rightarrow P_r = (-1, 3, 0), \vec{d}_r = (2, 3, 4) = \vec{n}_\pi \quad y \quad s: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + \frac{3}{2}t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \rightarrow \pi \equiv 2(x+1) + 3(y-3) + 4z = 0$

$\pi: 2x + 3y + 4z - 7 = 0$

b)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 7 = 0 \\ x = -1 + t \\ y = 3 + \frac{3}{2}t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \rightarrow -2 + 2t + 9 + \frac{9}{2}t + 4 + 8t - 7 = 0 \rightarrow 29t + 8 = 0 \rightarrow t = \frac{-8}{29}$$

$B = (-37/29, 75/29, 13/29) \quad c) d(r,s) = d(P_r, B) = \sqrt{\left(-1 - \frac{-37}{29}\right)^2 + \left(3 - \frac{75}{29}\right)^2 + \left(-\frac{13}{29}\right)^2} = \frac{\sqrt{321}}{29} u$