Problemas propuestos

Ángulos entre rectas y planos

1. Dadas las rectas *r* y *s* de ecuaciones: $r \equiv x-1 = y = 1-z$; $s \equiv \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$.

a) Comprueba que se cortan y halla su punto de corte.
b) Determina el ángulo que forman *r* y *s*.
c) Halla la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*.

2. (Propuesto en Selectividad en 2012, Murcia)
Calcula el ángulo que forman la recta *r* y el plano π, siendo:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \text{ y } \pi: x-2y-z=4$$

3. Halla el ángulo que forma el plano $\pi: x+y+z=0$ con la recta de ecuaciones $r: \begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases}$.

4. Halla el ángulo que forma la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv \sqrt{3}x - z = 3$.

5. Determina el ángulo que forman los planos:

$$\pi_1: 3x-y+2z+1=0 \text{ y } \pi_2: 2x+y-5z-1=0$$

6. Halla el ángulo que forman los planos $\pi_1: 2x-y+z=0$ y $\pi_2: x+y+2z-1=0$

Paralelismo y perpendicularidad

7. Sea el punto *P* = (1, 2, 3) y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$.

a) Halla la ecuación del plano π que pasa por *P* y es perpendicular a la recta *r*.
b) Halla el punto de corte entre la recta *r* y el plano π.

8. (Propuesto en Selectividad en 2011, Asturias)
Se considera la recta $r: \begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$.

a) Determina el plano π que contiene a *r* y pasa por el origen de coordenadas.
b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el punto (1, 0, 1).

9. Sea $\alpha \neq 0$ un número real, y las rectas de ecuaciones: $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{\alpha}$; $s \equiv \begin{cases} x = 1+4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases}$.

Determina el valor de α para el que *r* y *s* son paralelas. En ese caso, halla la ecuación general del plano que las contiene.

10. Dadas las rectas de ecuaciones: $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{cases}$; $r':\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+bz=0 \end{cases}$

a) ¿Qué relación debe existir entre *a* y *b* para que *r* y *r´* sean paralelas?
b) ¿Y para que sean perpendiculares?

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *P*(1, 3, –2) y que sea paralela a los planos: $\pi_1 : 2x-y+z+1=0$ y $\pi_2 : -x+3y-z+1=0$

12. Halla la ecuación del un plano perpendicular a los planos π_1 y π_2, del problema anterior, que pase por el punto *Q*(2, 0, –1).

13. Dadas las rectas: $r\equiv\begin{cases} x+2y=7 \\ y+2z=4 \end{cases}$, $s\equiv x-1=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

a) Comprueba que se cortan perpendicularmente.
b) Halla la ecuación del plano que las contiene.
c) Halla la recta perpendicular común a *r* y *s*.

14. Dadas las rectas: $r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$; $s\equiv\begin{cases} x=\mu \\ y=2+2\mu \\ z=0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a *r* y *s*.

15. Se consideran las rectas *r* y *s* de ecuaciones respectivas, $r\equiv\begin{cases} y=1 \\ z=0 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de *r* y *s*.
b) Determina la recta que corta perpendicularmente a *r* y *s*.
c) Halla la distancia ente *r* y *s*.

16. Sean las rectas de ecuaciones $r\equiv\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$.

a) Comprueba que se cruzan en el espacio.
b) Halla un punto de *r* y otro de *s* tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas. Halla la recta perpendicular común a *r* y a *s*.

17. Halla las ecuaciones de la recta perpendicular común a *r* y *s* y que corta a ambas, siendo:

$$r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{2}, \qquad s\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

<u>Proyecciones en el espacio</u>

18. Halla la proyección de *P*(1, –1, 0) sobre el plano $\pi : 3x+y-2z+7=0$:

19. Halla la proyección ortogonal de de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\pi \equiv x - 3y + 2z + 12 = 0$.
Obtén la solución de las dos formas posibles:
1) Mediante el corte de dos planos; 2) Proyectando dos puntos de *r* sobre el plano.

20. Halla la proyección del punto *P*(2, –1, 1) sobre la recta $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$.

Simetrías

21. Halla las coordenadas del punto *P´* simétrico de *P*(2, 0, –1) respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$.

22. (Propuesto en Selectividad en 2011, Islas Baleares)
Dados el punto *A* = (1, 3, 0) y el plano $\pi : x + 2y + z - 1 = 0$, determina las coordenadas del punto *A´*, simétrico del punto *A* respecto del plano π. Calcula la distancia de *A´* al plano π.

Distancias

23. Halla la distancia del punto *P* a la recta *r* en los siguientes casos:
a) *P*(2, 0, –1); $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$.
b) *P*(1, –1, 3); $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ c) *P*(16, 0, 0) ; $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$,

24. Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ cuya distancia al punto *P*(1, 0, 2) sea $\sqrt{5}$.

25. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$.
a) Comprueba que la recta es paralela al plano.
b) Halla la distancia de *r* a π.

26. Halla la distancia entre la recta determinada por el punto *S*(1, 0, 0) y el vector $\vec{v}$ = (1, 1, 0) y el plano $\pi \equiv x - y + z - 2 = 0$

27. Halla los dos puntos de la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ que están a distancia 1 del plano $\pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0$.

28. Halla la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = \quad t \\ z = 11 - 4t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = \quad h \\ z = 4 \end{cases}$. b) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$.

29. Halla la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s de ecuaciones:

$r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = \quad t \\ z = 11 - 4t \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = \quad h \\ z = 4 \end{cases}$.

Observación: Estas son las rectas del apartado a) del problema anterior.

30. Halla la distancia entre las rectas r y s de ecuaciones:

a) $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 7x - z = 8 \end{cases}$; $s \equiv x - 2 = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$. b) $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$; $s \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Plano bisector y plano mediador

31. Halla el plano bisector de los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + z + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$.

32. Comprueba para los planos del ejercicio anterior:
a) Que el plano π´ forma con cada uno de los dos iniciales, π_1 y π_2, un ángulo que es la mitad que el que determinan los planos π_1 y π_2.
b) Que los planos bisectores son perpendiculares.

33. Halla el plano mediador de los puntos P(1, –1, 0) y Q(–1, 3, 2).

34. Dados los puntos del espacio P(0, 0, 0) y Q(0, 1, 2), halla la condición que debe cumplir un punto de coordenadas $A(x, y, z)$ para que esté a la misma distancia de P y Q.

Otros problemas

35. a) Halla la recta r que pasa por el punto P(1, –1, –2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$.
b) Halla la ecuación de la recta s que pasa por los puntos A(1, 0, 0) y B(–1, –3, –4).
c) Estudia la posición relativa de r y s. Si se cortan, calcula el punto de corte.
d) Calcula la distancia del punto A(1, 0, 0) al plano π´ que pasa por el punto P(1, –1, –2) y es paralelo a π.

36. Dado el punto P(0, 8, 3) y la recta $s \equiv \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.
a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y a la recta s.
b) Calcula la ecuación de la recta r, perpendicular al plano hallado y que contiene a P.

37. Encuentra los puntos de la recta $r:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z}{2}$ que equidisten de los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y-1=0$ y $\pi_1 \equiv 4x-3z-1=0$.

38. Dadas las rectas de ecuaciones: $r\equiv\begin{cases}3x-y=-1\\7x-z=-4\end{cases}$ y $s\equiv x-2=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$.

a) Estudia su posición relativa.
b) Si se cruzan, calcula la distancia mínima entre ellas.

39. a) Sea π el plano determinado por el punto *P*(2, 2, 2) y los vectores $\vec{u}$ = (1, 0, –1) y $\vec{v}$ = (1, 1, 0). Calcula el ángulo que forma el plano π con la recta que pasa por los puntos O(0, 0, 0) y *Q*(2, –2, 2).
b) Calcula el punto simétrico de *O*(0, 0, 0) respecto del plano $x-y+z-2=0$.

40. (Propuesto en Selectividad en 2006, Madrid)
Sean las rectas:

$$r\equiv\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}\qquad s\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

a) Halla la ecuación de la recta *t* que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
b) Halla la recta perpendicular común a las retas *r* y *s*.

41. Considera la recta y el plano siguientes:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z+3}{4}\qquad \pi:2x+4y+4z=5$$

a) Comprueba que la recta *r* y el plano π son paralelos.
b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta *r*.
c) Calcula la ecuación implícita del plano π´ que es perpendicular a π y contiene a *r*.

42. (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla León)
Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos *P*(2, 1, 3) y *Q*(1, 3, 1); los otros dos sobre una recta *r* que pasa por el punto *R*(–4, 7, –6).
a) Calcula la ecuación de la recta *r*. (0,5 puntos)
b) Calcula la ecuación general del plano que contiene al cuadrado. (1 punto)
c) Halla las coordenadas de uno de los otros vértices. (1,5 puntos)

43. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1\equiv 3x-4y+5=0 \text{ y } \pi_2\equiv 2x-2y+z+9=0$$

¿Qué puntos del eje *OY* equidistan de ambos planos?

44. (Propuesto en Selectividad en 2009, Navarra)
Dado el punto *R*(1, –1, 2), encuentra los puntos *P* y *Q* de la recta

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-4=0\\x+2y+2z-6=0\end{cases}$$

tales que *PQR* sea un triángulo equilátero.

45. Los puntos $P(1, –1, 1)$ y $Q(3, –3, 3)$ son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación $x + y = 0$.

a) Determina los otros dos vértices.
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices obtenidos en a).
c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

46. Los puntos $P_1(2, –3, 3)$ y $P_3(0, 1, –1)$ son vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices de ese cuadrado sabiendo que están en la recta $r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Soluciones

1. a) $P(3, 2, –1)$. b) 19,47º. c) $\pi \equiv y + z - 1 = 0$.

2. 30º.

3. 19,47º.

4. 30º.

5. 75,88º.

6. 60º.

7. a) $\pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0$. b) $Q = (3, 1, 4)$.

8. a) $\pi : x + 2y + 5z = 0$. b) $s : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1+5\lambda \end{cases}$.

9. –1; $\pi \equiv 3x - 7y - z = 0$

10. a) $a = b$, y ambos distintos de 0. b) $a = –b$.

11. $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+t \\ z = -2+5t \end{cases}$.

12. $\pi : -2x + y + 5z + 9 = 0$.

13. a) Se cortan en $P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$. b) $x + y - 2z - 3 = 0$. c) $p \equiv \begin{cases} x = 13/3 + \lambda \\ y = 18/7 + \lambda \\ z = 5/7 - 2\lambda \end{cases}$.

14. Se cruzan. b) $p \equiv \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$.

15. a) Se cruzan. b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$. c) 2.

16. a) Se cruzan. b) $R(5, 1, 2)$; $S(2, –5, 2)$; $p \equiv \begin{cases} x = 5-3\lambda \\ y = 1-6\lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} x = -5/14 \\ y = 24/14 + p \\ z = 32/14 + p \end{cases}$.

18. $P´ = (–13/14, –23/14, 18/14)$.

19. $r´ \equiv \begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 4 + 23\lambda \\ z = 22\lambda \end{cases}$.

20. $P´ = \left(\frac{39}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{2}{14}\right)$.

21. $P´ = \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$.

22. $A´ = (–1, –1, –2)$; $\sqrt{6}$.

23. a) $\sqrt{\dfrac{59}{7}}$. b) $\sqrt{2}$. c) $\dfrac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}}$.

24. (1, 2, 3).

25. a) Lo es. b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

26. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

27. $P_1 = (3, 2, -2)$; $P_2 = (0, -1, 4)$.

28. a) 3. b) 0.

29. $\pi : 4x - 4y - 2z + 19 = 0$.

30. a) 0. b) $\sqrt{\dfrac{54}{11}}$.

31. $\pi : x - y - 2z - 9 = 0$ y $\pi' : x + y - 1 = 0$.

32. a) Si. b) Si.

33. $x - 2y - z + 3 = 0$.

34. Pertenecer al plano $2y + 4z - 5 = 0$.

35. a) $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$. b) $s : \begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = \quad -3h \\ z = \quad -4h \end{cases}$. c) Se cortan en $C(3, 3, 4)$. d) $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

36. a) $\pi : 2x - y - 2z + 14 = 0$. b) $r \equiv \begin{cases} x = \quad 2\lambda \\ y = 8 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$

37. $P_1 = \left(\dfrac{-26}{16}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{-10}{16} \right)$; $P_2 = \left(\dfrac{-2}{4}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{2}{4} \right)$.

38. a) Se cruzan. b) $\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

39. a) La recta es perpendicular al plano. b) $O' = (4/3, -4/3, 4/3)$.

40. a) $t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x = -22/25 - 3t \\ y = 47/25 + 5t \\ z = 6/25 + 4t \end{cases}$.

41. Lo son. b) $\dfrac{35}{6}$. c) $2x - z - 5 = 0$.

42. a) $r \equiv \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 7 + 2t \\ z = -6 - 2t \end{cases}$**.** b) $\pi : 2x - y - 2z + 3 = 0$. c) $P' = (0,\ -1,\ 2)$.

43. $x + 2y + 5z + 30 = 0$; $19x - 22y + 5z + 60 = 0$. (0, –15, 0) y $(0, 30/11, 0)$.

44. $P(2, 0, 2)$; $Q(2, -1, 3)$.

45. a) $\left(2 + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ -2 + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ 2 \right)$; $\left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ -2 - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ 2 \right)$. b) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$. c) $4\sqrt{6}$.

46. $P_2 = (3,\ -2,\ -1)$ y $P_4 = (-1,\ 0,\ 3)$.