

## 1º Trimestre

**1.-** Dados los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$  y  $\vec{v} = (-3, 1)$ .

**a)** Comprueba que forman una base de los vectores libres del plano.

**b)** Encuentra las componentes del vector  $\vec{w} = (-1, 5)$  en la base  $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$

a) Para que dos vectores del plano formen una base de  $\mathbb{R}^2$  basta con que no sean paralelos, o lo que es lo mismo, que no sean proporcionales:  $\frac{1}{-3} \neq \frac{2}{1}$ , por tanto no son paralelos, y por tanto forman una base  $B = \{(1, 2), (-3, 1)\}$

b) Escribimos el vector  $\vec{w} = (-1, 5)$  como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (-1, 5) = \alpha(1, 2) + \beta(-3, 1)$$

Esto nos genera un sistema de ecuaciones:  $\begin{cases} -1 = \alpha - 3\beta \\ 5 = 2\alpha + \beta \end{cases}$  cuya solución es:  $\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$$\text{Por tanto, } \vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v} = (2, 4) + (-3, 1) = (-1, 5) = \vec{w}$$

**2.-** Sean las recta  $r: mx - y = 1$  y la recta  $s: x - my = 2m - 1$ .

**a)** Estudia la posición relativa de las rectas, según los valores del parámetro  $m$ .

**b)** Determina  $m$  para que ambas rectas se corten en un punto de abscisa  $x=3$ .

Los vectores directores de  $r$  y  $s$  son  $\vec{r} = (m, -1)$  y  $\vec{s} = (1, -m)$ . Para que las rectas sean paralelas, ha de ocurrir

$$\text{que } \frac{m}{1} = \frac{-1}{-m} \rightarrow -m^2 = -1 \rightarrow m = \pm 1$$

Por tanto, si  $m$  es 1 ó -1, las rectas son paralelas. Veamos si son coincidentes o no:

- Si  $m=1$ , las rectas  $r$  y  $s$  son:  $\begin{cases} r: x - y - 1 = 0 \\ s: x - y - 1 = 0 \end{cases}$ , que como vemos son la misma, por tanto son coincidentes.
- Si  $m=-1$ , las rectas  $r$  y  $s$  son:  $\begin{cases} r: -x - y - 1 = 0 \\ s: x + y + 3 = 0 \end{cases}$ , que como podemos observar no son la misma, por tanto las rectas son paralelas no coincidentes.

En el caso de que  $m$  no sea ni 1 ni -1, las rectas son secantes. Veamos el caso en el que ambas son perpendiculares:

Para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que el producto escalar de los dos vectores directores sea nulo:

$$r \text{ y } s \text{ son perpendiculares } \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow (m, -1) \cdot (1, -m) = 0 \Leftrightarrow m + m = 0 \rightarrow 2m = 0$$

Por tanto para que sean perpendiculares, ha de ocurrir que  $m=0$ .

- Si  $m \neq 1$  y  $m \neq -1$ , las rectas son secantes.
- Si  $m=0$ , las rectas son perpendiculares.

Si ambas rectas se cortan en un punto con  $x=3$ , tenemos que el punto de corte será  $(3, y)$ , por tanto, si sustituimos en ambas rectas:

$$\begin{cases} r: 3m - y - 1 = 0 \\ s: 3 - my + 1 - 2m = 0 \end{cases}$$

despejando  $y$  de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$\begin{cases} y = 3m - 1 \\ 3 - m(3m - 1) + 1 - 2m = 0 \end{cases} \rightarrow 3 - 3m^2 + m + 1 - 2m = 0 \rightarrow -3m^2 - m + 4 = 0$$

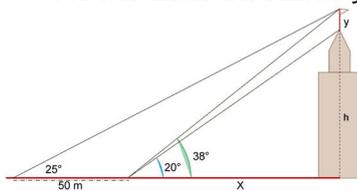
Resolviendo la ecuación de segundo grado en  $m$ , obtenemos:

$$3m^2 + m - 4 = 0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} \rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Si  $m=1$ , como son coincidentes, es claro que se cortan en un punto de abscisa 3, y para el otro caso, son secantes en el punto de abscisa 3.

**3.-** En el tejado de una casa hay una antena. Desde un punto del suelo se ven la casa y la antena bajo ángulos de  $20^\circ$  y  $38^\circ$  respectivamente. 50 metros más atrás, la antena se ve bajo un ángulo de  $25^\circ$ . Calcula la longitud de la antena.

Sea  $h$  la altura del edificio y la antena, aplicando tangentes en los dos triángulos tenemos:



$$\begin{cases} \tan 38 = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \tan 38 \\ \tan 25 = \frac{h}{x + 50} \rightarrow h = \tan 25 \cdot (x + 50) \end{cases}$$

igualando:  $x \tan 38 = \tan 25(x + 50)$

Operando:

$$x \tan 38 - x \tan 25 = 50 \tan 25 \rightarrow x = \frac{50 \tan 25}{\tan 38 - \tan 25} = 74,02 \text{ m}$$

Y de aquí, la altura de la torre y la antena  $h$  es:  $h = x \cdot \tan 38 = 57,83 \text{ m}$

Para calcular la altura de la antena, calcularemos antes la altura del edificio  $h'$ :

$$\tan 20 = \frac{h'}{x} \rightarrow h' = x \cdot \tan 20 = 74,02 \cdot \tan 20 = 26,94 \text{ m}$$

Por tanto, la altura de la antena  $y$ , la calculamos haciendo la diferencia de las dos alturas:

$$y = h - h' = 57,83 - 26,94 = 30,89 \text{ m}$$

**4.-**

**a)** Expresa  $\cos(3\alpha)$  en función de  $\cos \alpha$

Descomponiendo  $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha)$  y desarrollando como el coseno de una suma:

$$\cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha,$$

Utilizando las razones trigonométricas de los ángulos dobles:

$$= \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen} \alpha \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \cos \alpha$$

Hacemos el cambio  $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$= \cos^3 \alpha - \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha = \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha$$

Agrupando, llegamos a:

$$= 4 \cos^3 - 3 \cos \alpha = \cos(3\alpha)$$

**b)** El coseno de un ángulo del primer cuadrante vale  $12/13$ , calcula  $\text{sen}(180 + \alpha)$

Como  $\text{sen}(180 + \alpha) = -\text{sen} \alpha$ , entonces calculamos el seno utilizando la identidad fundamental de la trigonometría y por tanto: tenemos que  $\text{sen}(180 + \alpha) = -\frac{5}{13}$

**5.-**

**a)** Resuelve la ecuación  $2 \cdot \text{sen}(2x) = \sqrt{2}$

Si pasamos el 2 a la derecha:  $\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Los ángulos cuyo seno es  $+\frac{\sqrt{2}}{2}$  son  $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ , despejando x tenemos:  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x_2 = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$

O lo que es lo mismo en grados sexagesimales:

$$x_1 = 22^\circ 30' + 180k = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad x_2 = 67^\circ 30' + 180k = \frac{3\pi}{8} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

**b)** Simplifica la siguiente expresión trigonométrica:  $\frac{2 \cdot \cos(45 + \beta) \cdot \cos(45 - \beta)}{\cos(2\beta)}$

Utilizando las fórmulas del coseno del ángulo suma, del ángulo diferencia y del ángulo doble:

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cdot \cos B - \text{Sen}A \cdot \text{Sen}B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cdot \cos B + \text{Sen}A \cdot \text{sen}B \\ \cos(2A) &= \cos^2 A - \text{sen}^2 A \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\frac{2 \cdot \cos(45 + \beta) \cdot \cos(45 - \beta)}{\cos(2\beta)} = \frac{2(\cos 45 \cdot \cos \beta - \text{sen}45 \cdot \text{sen}\beta) \cdot ((\cos 45 \cdot \cos \beta + \text{sen}45 \cdot \text{sen}\beta))}{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta}$$

Operando, llegamos a:

$$= \frac{2(\cos 45 \cdot \cos \beta - \text{sen}45 \cdot \text{sen}\beta) \cdot (\cos 45 \cdot \cos \beta + \text{sen}45 \cdot \text{sen}\beta)}{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta} = 2 \frac{\cos^2 45 \cdot \cos^2 \beta - \text{sen}^2 45 \cdot \text{sen}^2 \beta}{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta}$$

Sustituyendo el seno de 45 y el coseno de 45 por su valor, tenemos:

$$= 2 \frac{\cos^2 45 \cdot \cos^2 \beta - \text{sen}^2 45 \cdot \text{sen}^2 \beta}{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta} = 2 \frac{\frac{1}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \text{sen}^2 \beta}{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta}{\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta} = 1$$

## 2º Trimestre

**6.-** a) Halla las soluciones de la ecuación:  $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

b) Encuentra la ecuación que tiene por raíces 2, -3, i y -i.

a)  $Z_1 = 2_0; Z_2 = 2_{120}; Z_3 = 2_{240}; Z_4 = 1_{60}; Z_5 = 1_{180}; Z_6 = 1_{300}$       b)  $z^4 + z^3 - 5z^2 + z - 6 = 0$

**7.-**

a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, Z, y el opuesto del conjugado del mismo número?. Razona la respuesta.

b) Calcula los números x e y de modo que:  $\frac{3-xi}{1+2i} = y+2i$

a) *Iguales*      b)  $x = -16$        $y = 7$

**8.-** Halla la longitud de los lados y del área del cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de la ecuación  $z^4 + 16 = 0$

$l = 2\sqrt{2}$        $A = 8 \text{ u.a.}$

**9.-** La circunferencia C pasa por el punto A(4,0) y es tangente a la recta  $y=x$  en el punto B(4,4).

a) Determina la ecuación de la recta que pasa por B y por el centro de la circunferencia C.

b) Encuentra el centro C y calcula su radio. (2 puntos)

a)  $x+y-8=0$       b)  $C(6,2)$        $r = 2\sqrt{2}$

**10.-** Halla la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo de vértices A(1,6), B(-4,-4) y C(4,0)

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

### 3º Trimestre

**11.-**

a) Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 Kg. Esas latas de tomate se venden a 1; 1,80 y 3,30 €, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 Kg y nos cuestan 35,60 €. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

**Sol: 8 latas de A, 8 latas de B y 4 latas de C**

b) Resuelve la siguiente ecuación:  $\log_2(x-5) - \log_2(x-6) = 3 - \log_2(2x-10)$

**X=7**

**12.-** Calcula a y b sabiendo que la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

es derivable en todo su dominio.

**Sol: a=-20; b=-5**

**13.- a)** Diga cuando un punto  $(x_0, f(x_0))$  es de inflexión para una función de  $f(x)$ .

**b)** Calcule los coeficientes a y b del polinomio  $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ , para que su gráfica pase por el punto (1,1), teniendo aquí un punto de inflexión.

**c)** Diga, razonadamente, si en el punto (1,1) la función es creciente o decreciente.

Sol: b) a=1; b=2; c) Decreciente.

## 14.-

**a)** Escriba la “regla de la cadena” para la derivación de funciones compuestas.

La **regla de la cadena** afirma que si f es derivable en x y g es una función derivable en f(x), entonces la función compuesta  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  es derivable en x y su derivada vale:

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot g'(x)$$

**b)** Calcule y simplifique en lo posible, la derivada de la función:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right) \rightarrow f'(x) = 2 \cdot \operatorname{cosec}(x)$$