GLOBAL DERIVADAS

1) Hallar los valores de a y b para que la función *f* sea derivable en todo R.

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + bx + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$ (2 puntos)

2 Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = \left(x^2 + 1\right)^{sen\, x}$ b) $y = arctg\left(\sqrt{x^2 + 4}\right)$ (1,5 puntos)

3) Haz un estudio lo más completo posible de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ y represéntala gráficamente. (2,5 puntos)

4) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln x$ que es paralela a la recta de ecuación $y = 3x - 2$ (1,25 puntos)

5) Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 8 m de radio. (1,5 puntos)

6) Halla los valores de a, b y c para que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ verifique:

a) La recta tangente en el punto (0,3) es la de ecuación $y = -2x + 3$

b) Tiene un extremo relativo en el punto de abscisa 1. (1,25 puntos)

SOLUCIONES

1) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si\ x \le 0 \\ x^2 + bx + a & si\ x > 0 \end{cases}$ para que sea derivable en R, primero tiene que ser continua, cada trozo es continuo y derivable (la primera parte es una exponencial y la segunda una función polinómica)

Tendremos que "obligar" a que sea continua y derivable en el punto de "enganche", es decir el 0. Continuidad en 0: $\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{ax} = e^0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 + bx + a) = a \end{array}\right\} \to a = 1$

Derivabilidad en 0: $f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & x < 0 \\ 2x + b & x > 0 \end{cases} \to \begin{cases} f'(0^-) = ae^0 = a \\ f'(0^+) = 2\cdot 0 + b = b \end{cases} \Rightarrow b = 1$

2) a) $y = (x^2+1)^{sen\,x}$ ésta la hacemos por derivación logarítmica:

$\ln y = \ln(x^2+1)^{sen\,x} = sen\,x \cdot \ln(x^2+1)$ y ahora, derivamos

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(x^2+1) + sen\,x \cdot \frac{2x}{x^2+1} \to y' = \left[\cos x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x\,sen\,x}{x^2+1}\right]\cdot y$$

$$y' = \left[\cos x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x\,sen\,x}{x^2+1}\right]\cdot (x^2+1)^{senx}$$

b) $y = arctg\left(\sqrt{x^2+4}\right) \to y' = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}} \cdot 2x \to$

$$\to y' = \frac{1}{1+x^2+4} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} \to y' = \frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+4}}$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

DOMINIO: $Dom(f) = R - \{2\}$, es continua y derivable en su dominio.

SIMETRÍA: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x-2} = \dfrac{x^2}{-x-2}$ NO es simétrica

ASÍNTOTAS:

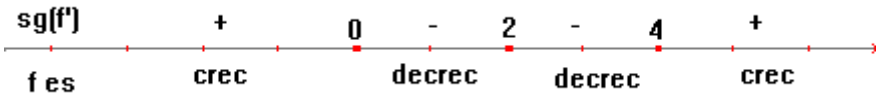
VERTICALES: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0} \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \end{array}\right. \to A.V.\ x = 2$

OBLICUA: $y = mx + n \to m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)} = 1$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-2} = 2 \Rightarrow \textbf{A.O. } y = x+2$$

CRECIMIENTO Y EXTREMOS RELATIVOS

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \to \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \to x(x-4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



Luego, tenemos un máximo en 0
y un mínimo en 4, es decir MÁX $(0,0)$, MÍN $(4,8)$

CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INF.

$f''(x) = \dfrac{8}{(x-2)^3} \to$ No Puntos de Inflexión

CORTE CON LOS EJES

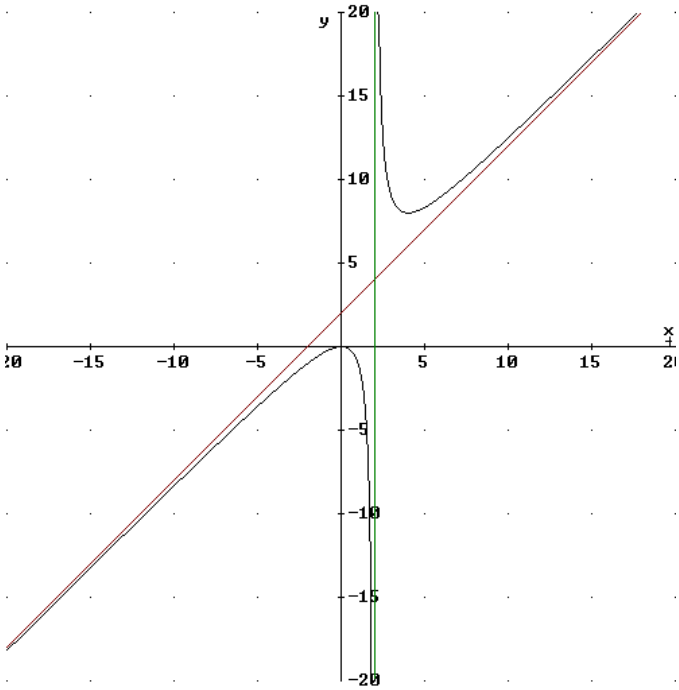
para $x = 0 \to y = 0$

para $y = 0 \to \dfrac{x^2}{x-2} = 0$

$\to x = 0$

Solamente corta a los ejes en (0,0)

GRÁFICA $\to$

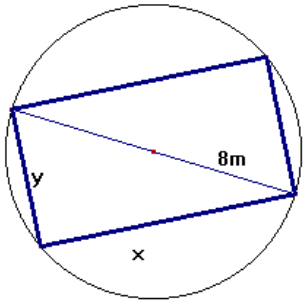


4) $y = \ln x$ tangente paralela a la recta $y = 3x - 2$

La pendiente de la recta tangente pedida tiene que ser la misma que la de la recta dada, es decir 3, por lo que sabemos que $f'(x_0) = 3$ y tenemos que hallar x_0, para lo cual derivamos la función e igualamos a 3: $y' = \dfrac{1}{x} = 3 \Rightarrow x_0 = \dfrac{1}{3} \to y_0 = \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Recta tangente: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \to y = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \to y = 3x - 2'099$

5) La función que hay que optimizar el es área del rectángulo $A = x \cdot y$



utilicemos lo que sabemos, el radio es 8 m, luego el diámetro es de 16 m, y por el teorema de Pitágoras, tenemos que: $x^2 + y^2 = 16^2 \Rightarrow y = \sqrt{256 - x^2}$

sustituyendo, tenemos $A(x) = x\sqrt{256 - x^2}$

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = \sqrt{256 - x^2} + \frac{x(-2x)}{2\sqrt{256 - x^2}} \Rightarrow$$

$$A'(x) = \frac{256 - x^2 - x^2}{\sqrt{256 - x^2}} = \frac{256 - 2x^2}{\sqrt{256 - x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$256 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 256 \Rightarrow x^2 = 128 \Rightarrow x = \sqrt{128} = 11{,}31\text{m}$$

Para x=11,31 m tenemos un máximo, ya que, si estudiamos el signo de A´ vemos que pasa de positiva (creciente) a negativa (decreciente).

Para ese valor de x tenemos que $y = \sqrt{256 - 128} = 11{,}31\text{m}$ es decir, la solución es un cuadrado de lado 11,31 m.

6) $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) recta tangente $y = -2x + 3 \rightarrow m = -2 \rightarrow f'(0) = -2$

y también, como es en el (0,3) $\rightarrow f(0) = 3$

b) $f'(1) = 0$

Hallamos la derivada: $f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) = b = -2 \\ f(0) = c = 3 \\ f'(1) = 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = -2 \\ c = 3 \\ 2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 3$$